Moreno ANDREATTA

Calcul algébrique et calcul catégoriel en musique : aspects théoriques et informatiques[1]

Introduction

Si la notion de calcul en informatique, de même que celle de calcul en musique, semble échapper à une définition simple et

1. Ce texte reprend et développe le contenu d'un article publié dans la revue *L'Ouvert* (M. Andreatta, « Quelques aspects théoriques d'une approche algébrique en musique », *L'Ouvert*, n° 112, novembre 2005, p. 1-18) dans lequel nous avions discuté quelques problèmes théoriques qui avaient fait l'objet de notre travail de thèse en musicologie computationnelle (M. Andreatta, *Méthodes algébriques en musique et musicologie du XXe siècle : aspects théoriques, analytiques et compositionnels*, thèse de doctorat, EHESS/Ircam, 2003). Au-delà d'une étude historique, visant à retracer l'émergence du concept de *structure algébrique* en musique, nous y avions choisi de partir de quelques problèmes mathématiques posés par la théorie de la musique, l'analyse musicale et la composition susceptibles d'intéresser à la fois le musicologue et le *working mathematician*. Cela diffère considérablement de l'approche traditionnelle de l'étude des rapports entre mathématiques et musique, consistant à discuter l'application d'outils mathématiques au domaine musical. Cette approche nous a permis de mettre en évidence la place singulière des méthodes algébriques dans la musique et musicologie du XXe siècle. Nous en analysons ici quelques aspects en privilégiant les rapports entre calcul formel et implémentation informatique.

rigoureuse[2], le calcul algébrique relève d'un domaine bien défini, aussi bien en ce qui concerne les méthodes utilisées que les applications informatiques et musicales qui en découlent. L'utilisation des méthodes algébriques en musique et en informatique musicale met en œuvre trois aspects qui sont souvent étroitement liés : aspects théoriques, analytiques et compositionnels. Bien qu'il soit souvent tentant de les séparer, afin de mettre en évidence leurs propres modes de fonctionnement, nous avons insisté à plusieurs reprises sur le caractère très limitatif d'une telle catégorisation qui prétendrait définir les champs possibles d'application d'une méthode algébrique donnée à la musique ou à la musicologie. Il est bien connu qu'au XX^e^ siècle, théorie musicale, analyse et composition sont des disciplines qui s'influencent mutuellement. De plus, l'impossibilité d'une telle séparation paraît d'autant plus évidente lorsque l'on se place dans le contexte des rapports entre calcul algébrique, implémentation informatique et application musicale.

Tout d'abord, en laissant de côté les aspects informatiques, une analyse historique de l'émergence de l'approche algébrique en musique met en évidence le rôle clé joué par certains compositeurs/théoriciens qui n'ont pas hésité à proposer des applications analytiques de leurs démarches théoriques et compositionnelles, contribuant, ainsi, à la constitution d'une analyse musicale computationnelle en tant que discipline. Nous avons beaucoup insisté[3] sur le rôle joué par trois compositeurs/théoriciens qui

2. Nous renvoyons le lecteur à deux ouvrages récents centrés sur les rapports entre calcul et raisonnement. En particulier, voir Dowek (G. Dowek, *Les Métamorphoses du calcul*, Paris : Le Pommier, 2007) pour une discussion sur l'articulation entre calcul et raisonnement dans le cas des problèmes théoriques posés par l'informatique et Chemillier (M. Chemillier, *Les Mathématiques naturelles,* Paris : Odile Jacob, 2007) pour une réflexion sur les rapports entre formalisations et représentations musicales à partir des mathématiques développées dans des sociétés qui ne font pas nécessairement usage de l'écriture. Les présentations des intervenants au Colloque « Le calcul de la musique » (Université Jean Monnet, Saint-Étienne, 2 mars 2007) n'ont fait que confirmer la difficulté d'une définition rigoureuse du concept de calcul en informatique musicale.

3. Voir M. Andreatta, *op. cit.*, 2003 et M. Andreatta, *op. cit.,* 2005.

étaient, à nos yeux, emblématiques d'une réflexion théorique sur la musique, non seulement dans ses ramifications analytiques et compositionnelles, mais aussi dans son caractère éminemment algébrique : Milton Babbitt aux États-Unis, Iannis Xenakis en Europe et Anatol Vieru en Europe de l'Est. Tous les trois sont arrivés, presque au même moment et d'une façon indépendante, à la découverte du caractère algébrique de plusieurs problèmes théoriques posés par la musique (du tempérament égal aux propriétés combinatoires du sérialisme intégral et des techniques modales).

Plus récemment, l'implémentation de nombreux outils théoriques d'aide à l'analyse musicale en *OpenMusic*[4] a soulevé le problème de la calculabilité d'une théorie musicale et transformé, progressivement, la nature même de la musicologie en tant que discipline relevant (principalement) des sciences humaines. L'approche algébrique, et sa mise en œuvre en informatique musicale, ajoute l'élément computationnel au caractère « systématique » de la musicologie, telle qu'elle s'est constituée, grâce à Guido Adler, vers la fin du XIXe siècle[5]. En particulier, les méthodes algébriques permettent de résoudre, d'une façon très élégante, des problèmes classiques concernant l'énumération et la classification des structures musicales, en généralisant à toute division égale de l'octave les tables de classification d'accords utilisées dans le cas du tempérament égal usuel. Ces techniques, qui s'appliquent également à d'autres paramètres que les hauteurs (en particulier les structures rythmiques), reposent sur des cadres

---

4. Ce langage de programmation visuelle, développé par l'Équipe Représentations Musicales de l'Ircam (C. Agon, *OpenMusic : un langage visuel pour la composition musicale assistée par ordinateur*, thèse, Université de Paris VII, 1998 ; G. Assayag, C. Agon, M. Laurson et C. Rueda, « Computer Assisted Composition at Ircam : Patchwork and OpenMusic », *Computer Music Journal*, 23(3), 1999), était initialement conçu pour la composition assistée par ordinateur mais il est de plus en plus employé comme outil analytique, comme nous aurons l'occasion de montrer en présentant notre approche paradigmatique en ce qui concerne la classification d'accords et des rythmes.
5. C. Adler, « Umfang, Methode und Ziel der Musikwissenschaft », *Vierteljahresschrift für Musikwissenschaft*, 1, 1885, p. 5-20.

conceptuels relativement élémentaires d'un point de vue mathématique car la structure algébrique sous-jacente est fondamentalement une structure de groupe (cyclique, dihédral, affine, symétrique). Cependant, des méthodes catégorielles développées à partir des années 1980 par le mathématicien et théoricien suisse Guerino Mazzola[6] offrent à la musicologie computationnelle un énorme pouvoir d'abstraction et de formalisation. Et si la généralisation de la Set Theory américaine par David Lewin et le modèle théorique proposé par Guerino Mazzola se rejoignent en postulant la primauté de la notion de « transformation » sur celle d'« objet musical », ce changement de perspective, implicite dans toute démarche algébrique, est riche de conséquences philosophiques, car il ouvre une question fondamentale sur le rapport entre « objets mathématiques » et « structures musicales ». Nous reviendrons dans la partie conclusive sur ces considérations d'ordre philosophique et épistémologique qui semblent dessiner un nouveau paysage dans la recherche « mathémusicale » contemporaine.

Formalisation et représentation des structures musicales

Dans cette partie, nous allons discuter deux exemples de représentations des structures musicales qui montrent assez bien

6. À partir de l'ouvrage *Gruppen und Kategorien in der Musik* (G. Mazzola, *Gruppen und Kategorien in der Musik*, Berlin : Helderman, 1985) et jusqu'à *The Topos of Music* (G. Mazzola, *Topos of Music*, Birkhäuser Verlag, 2004), la réflexion « théorique » sur la formalisation algébrique et catégorielle des structures musicales a conduit progressivement à la mise en place d'une architecture informatique ayant la même puissance du calcul mathématique. C'est précisément cette architecture, fondée sur un concept somme toute « sémiotique » (celui des « dénotateurs »), qui rend possible une formulation élégante de certaines constructions de la tradition américaine, en particulier des réseaux de Klumpenhouwer (G. Mazzola et M. Andreatta, « From a Categorical Point of View : K-nets as limit denotators », *Perspectives of New Music*, 44(2), 2006, p. 88-113). Sans rentrer dans les détails techniques de cette construction, nous donnerons simplement le résultat final qui représente, selon nous, un exemple assez convaincant d'application de la théorie des catégories dans l'énumération des structures musicales.

les rapports profonds entre calcul algébrique et calcul en musique. Le premier exemple concerne la représentation géométrique de l'espace des hauteurs (ou *Tonnetz*), une construction qui remonte à la fin du XVIII[e] siècle et qui vit à présent un état de grâce à la suite des travaux de l'école néo-riemannienne, aussi bien en Europe qu'aux États-Unis[7]. Cette algébrisation sera opérationnelle (voire computationnelle) dans le deuxième exemple concernant la représentation circulaire dont nous allons montrer quelques applications en ce qui concerne le problème de la classification « paradigmatique » des structures musicales.

Le *Tonnetz* et le « cadran d'horloge » : d'une représentation géométrique à une formalisation algébrique

Représentations musicales et représentations mathématiques sont intimement liées, comme on peut le constater en retraçant l'histoire de la formalisation de l'espace harmonique depuis les premiers essais qui datent de la fin du XVIII[e] siècle jusqu'aux théories néo-riemanniennes contemporaines. Le mathématicien Euler est sans doute l'un des premiers à avoir proposé de représenter l'espace des hauteurs *more geometrico*. Dans son ouvrage *De Harmoniae*[8], Euler propose une représentation bidimensionnelle des douze hauteurs dans un repère cartésien dont les axes sont donnés par les intervalles de quinte juste (*per quintam ascendendo*) et de tierce majeure (*per tertiam ascendendo*). Cette représentation, donnée en figure 1, est appelée *speculum musicum*.

7. Voir Cohn (R. Cohn, « Introduction to Neo-Riemannian Theory : a Survey and a Historical Perspective », *Journal of Music Theory*, 42(2), 1998, p. 167-180) pour une introduction à la théorie néo-riemannienne depuis la perspective américaine. Une présentation des approches néo-riemanniennes du point de vue de la théorie mathématique de la musique européenne est donnée par Noll et Brand (T. Noll et M. Brand, « Morphology of Chords », in *Perspectives in Marthematical and Computational Music Theory*, G. Mazzola, T. Noll et E. L.-Puebla (dir.), epOs, Osnabrück, 2004, p. 366-398).
8. L. Euler, « De harmoniae veris principiis per speculum musicum repraesentatis », in *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 18, 1774, p. 330-353.

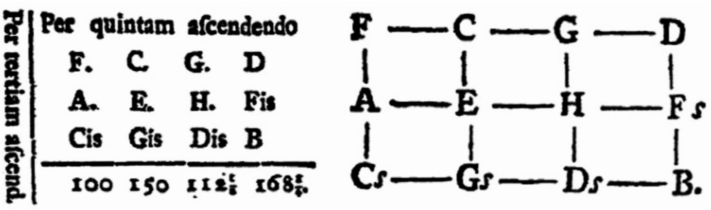


Figure 1 – Représentation géométrique de l'espace des hauteurs chez Euler (speculum musicum).

Il est intéressant de remarquer que, malgré l'impossibilité de la part d'Euler de donner une formalisation algébrique du *speculum musicum* en termes de théorie des groupes, il souligne le caractère à la fois qualitatif (géométrique) et quantitatif (métrique) d'une telle représentation des hauteurs. Euler s'appuie en effet sur le *speculum musicum* pour poser des problèmes théoriques tout à fait proches à ceux qu'il exposa, quelques années auparavant, dans d'autres écrits mathématiques[9]. L'une des caractéristiques majeures des représentations mathématiques est le haut niveau de métamorphose dont elles sont sujettes[10]. Il nous est impossible ici de retracer les développements de cette représentation mathématique de l'espace harmonique, que l'on retrouve chez les théoriciens de la musique du XIXe siècle (en particulier Hugo Riemann) et qui, comme nous l'avons mentionné, constituera au XXe siècle le point de départ pour une approche analytique s'inscrivant pleinement à l'intérieur d'une démarche transformationnelle : la théorie néo-riemannienne. La figure suivante montre quelques exemples de représentations géomé-

---

9. Voir Euler (L. Euler, « Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis », in *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 8, 1741, p. 128-140), texte qui contient le célèbre problème des ponts de Königsberg et qui est considéré l'acte de naissance de la topologie et de la moderne théorie des graphes.
10. C'est précisément ce pouvoir de se métamorphoser, bien souligné par Chemillier (M. Chemillier, *op. cit.*, 2007), qui permet d'utiliser une même représentation géométrique (notamment la représentation circulaire) pour formaliser des techniques musicales issues d'une tradition orale ou bien du répertoire contemporain de la musique savante occidentale.

triques de l'espace de hauteurs qui peuvent être considérées comme des extensions du modèle eulérien : le *Tonnetz* de Hugo Riemann[11], le modèle computationnel utilisé par Longuet-Higgins dans sa démarche d'analyse automatique de l'interprétation musicale[12] et le *Tonnetz* abstrait proposé par Richard Cohn[13].

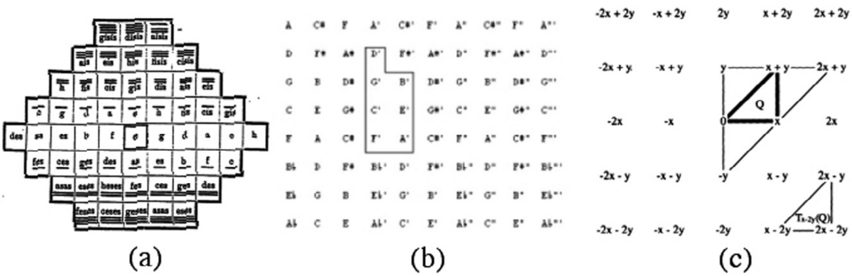


Figure 2 – Trois extensions du modèle eulérien :
le Tonnetz de Hugo Riemann (a),
le modèle de Cristopher Longuet-Higgins (b)
et la généralisation proposée par Richard Cohn (c).

Notons qu'une grande distance sépare les représentations proposées par Euler, Riemann et Longuet-Higgins de celles utilisées

11. Hugo Riemann, « Ideen zu einer 'Lehre von den Tonvorstellungen' », *Jahrbuch Peters*, 21/22, 1914, p. 1-26.
12. C. Longuet-Higgins, *Mental Processes*, MIT Press, 1987.
13. Richard Cohn (R. Cohn, *op. cit.*, 1998). Parmi les propositions théoriques issues de la représentation géométrique d'Euler mais indépendantes des théories néo-riemanniennes développées aux États-Unis, on peut citer la théorie des vecteurs harmoniques de Nicolas Meeùs, une théorie qui, comme l'auteur l'a souligné, appartient pleinement à la famille des théories transformationnelles. Pour une introduction à la théorie des vecteurs harmoniques, voir Meeùs (N. Meeùs, « Vecteurs harmoniques », *Musurgia,* vol. X/3-4, 2003). François Nicolas a récemment proposé une analyse des rapports entre la théorie d'Euler et les théories mathématiques de la musique, en particulier celle de Guerino Mazzola. Voir Nicolas (F. Nicolas, « Pour des rapports d'un type nouveau entre mathématiques et musique, en germe dans l'échange Euler/Rameau de 1752 », *Journée Annuelle mathématique et musique*, Société Mathématique de France, 2008).

dans la théorie transformationnelle. Dans le premier cas, l'espace géométrique est un espace théoriquement infini, car il est engendré par des intervalles qui ne sont pas tempérés. Dans le cas des théories néo-riemanniennes, l'espace acoustique sous-jacent à la représentation géométrique est celui du tempérament égal. Le *Tonnetz* se réduit donc à une portion limitée du plan géométrique dans laquelle les côtés opposés sont deux à deux identifiés, ce qui conduit tout naturellement à la représentation de type toroïdale en figure 3.

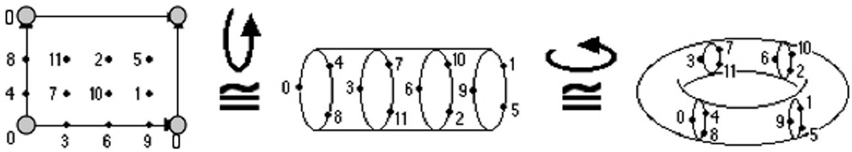


Figure 3 – De l'espace bidimensionnel
à la représentation toroïdale.

D'un point de vue mathématique, le tore en figure 3 peut être formalisé comme le produit cartésien du groupe cyclique $\mathbf{Z_3}$ engendré par l'intervalle de tierce majeure et du groupe cyclique $\mathbf{Z_4}$ engendré par la tierce mineure, ce qui est isomorphe (via le théorème de Sylow) au groupe cyclique $\mathbf{Z_{12}}$ d'ordre 12, c'est-à-dire au cercle chromatique (figure 4) :

Or, deux représentations musicales qui sont équivalentes d'un point de vue mathématique ne le sont pas nécessairement d'un point de vue musical. Par exemple, le modèle toroïdal permet une meilleure compréhension de la dichotomie entre intervalles consonants et intervalles dissonants[14] tandis que la représentation circulaire est sans doute la mieux adaptée pour mettre en évidence des propriétés de symétrie des structures musicales, aussi bien en ce qui concerne l'espace des hauteurs que le domaine rythmique.

14. G. Mazzola, *op. cit.*, 2004.

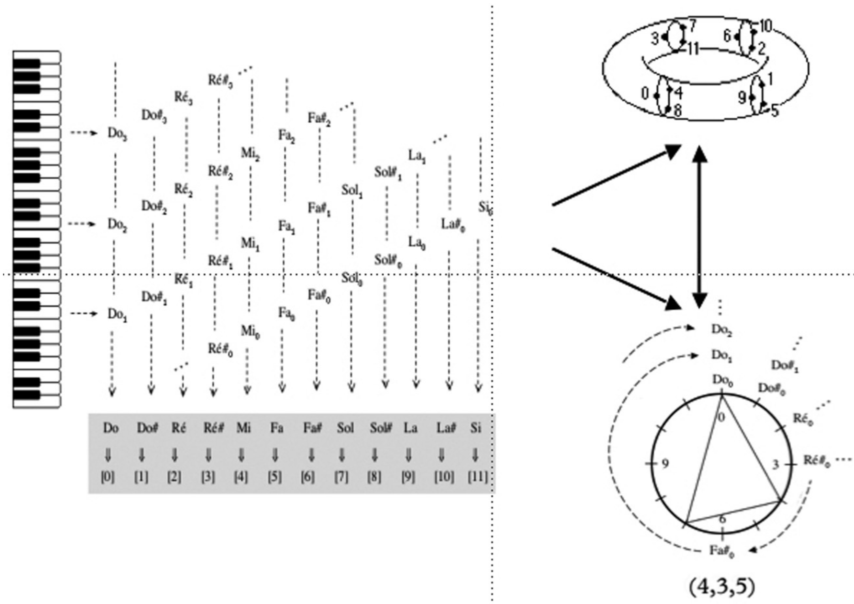


Figure 4 – Équivalence formelle entre représentation toroïdale et représentation circulaire.

Dans le cas de la représentation circulaire, l'hypothèse sous-jacente est celle qui permet de formaliser tout accord musical (dans une division de l'octave musicale en un nombre *n* de parties égales) comme un sous-ensemble d'un groupe cyclique ***Z/nZ*** d'ordre *n*. Tout accord de *m* notes distinctes (modulo l'octave) peut donc se représenter d'un point de vue géométrique comme un *m*-polygone inscrit dans un cercle et l'on peut lui associer de façon unique une suite de nombres entiers qui comptent les intervalles successifs dans l'accord (structure intervallique). Une telle structure est un *invariant* au sens algébrique car elle permet d'identifier de façon unique un accord et ses transpositions, celles-ci étant des rotations du polygone inscrit dans le cercle d'un angle égal à un multiple de 30°. La démarche algébrique acquiert ainsi un caractère singulier par rapport à d'autres approches formalisées en théorie musicale en ce qui concerne l'articulation entre la notion de « formalisation » et celle de « représentation ». Traditionnellement, la représentation précède la formalisation, au sens que l'on formalise ce que l'on sait déjà représenter[15]. Dans le cas de la démarche algébrique, la représentation circulaire aussi bien que la représentation toroïdale sont plutôt les résultats d'une formalisation, laquelle montre la possibilité d'associer de façon naturelle à toute division bien tempérée de l'octave une structure algébrique de groupe cyclique. On peut appliquer à cette structure des théorèmes d'algèbre qui permettront d'aboutir ensuite à d'autres types de représentations[16].

Méthodes algébriques en théorie et composition musicales

Une enquête parallèle afin d'explorer certaines étapes de la pensée algébrique en mathématiques peut donc aider à bien articuler la réflexion sur le rapport entre formalisation et représentation des structures musicales. En même temps elle permet de mieux comprendre la place des certains compositeurs/théoriciens vis-à-vis de l'émergence de l'idée de structure algébrique en musique. En effet, l'histoire des mathématiques montre que, presque à la même époque que la réflexion de Guido Adler sur le caractère systématique de la recherche musicologique, les mathématiciens ouvraient une réflexion qui dépassera largement le cadre de leur propre discipline.

Notre regard rétrospectif sur les étapes de la pensée algébrique en mathématiques a mis en évidence certains éléments qui

---

15. Sur ce point, voir en particulier Chemillier (M. Chemillier, *op. cit.,* 2007).
16. Le tore n'est qu'un exemple de représentation géométrique issue d'une formalisation de l'espace des hauteurs. D'autres représentations qui commencent à être utilisées en théorie mathématique de la musique sont la bouteille de Klein (R. Peck, « Klein-Bottle Tonnetze », *Music Theory Online*, 9(3), 2003. Voir à l'adresse : http://www.societymusictheory.org) et le ruban de Möbius (G. Mazzola, *Geometrie des Töne*, Birkhäuser Verlag, 1990 et D. Tymoczko, « The Geometry of Musical Chords », *Science*, 313, 2006, p. 72-74). La théorie des orbifolds de D. Tymoczko propose des représentations mathématiques de la musique de dimensions supérieure à trois. Voir M. Andreatta, « La géométrie d'un *Prelude* », *Pour la Science*, n° 349, 2007 pour un survol de la théorie de Tymoczko pour l'analyse musicale.

ont représenté, historiquement, le point de départ d'une réflexion théorique sur les fondements algébriques de la musique. Pour cela, nous avons d'abord analysé l'évolution du concept d'action d'un groupe sur un ensemble à partir du « Programme d'Erlangen » de Felix Klein[17] jusqu'aux développements les plus récents sur la théorie mathématique des catégories, en passant par l'axiomatique hilbertienne et l'expérience Bourbakiste. Le formalisme de Hillbert et l'approche structurale de Bourbaki sont deux moments de la pensée mathématique contemporaine qui ont influencé de façon décisive la naissance et l'évolution de la théorie de la musique au sens moderne. Cela permet notamment de comprendre la nature algébrique de certaines orientations formelles en analyse musicale, en particulier en ce qui concerne la *Set Theory* d'Allen Forte et la *Transformational Theory* de David Lewin.

Notons cependant que, d'un point de vue historique, l'utilisation des méthodes algébriques en musique concerne tout d'abord la théorie de la musique et la composition, l'application analytique n'ayant pris un caractère systématique, de façon explicite, qu'avec la théorie transformationnelle de David Lewin. Citons à ce propos l'un des problèmes musicaux qui a le plus fasciné à la fois les théoriciens de la musique, les compositeurs et les mathématiciens : celui de la classification des séries dodécaphoniques « tous-intervalles » *(all-interval rows)*. Ces séries ont la propriété remarquable de contenir tous les intervalles entre les notes successives (sauf l'intervalle 0 qui n'est pas autorisé car une série dodécaphonique n'admet pas de répétition de notes). Généralement, on considère l'ouvrage *Grundlagen der musikalischen Reihentechnik* d'Herbert Eimert[18] comme la première étude systématique des propriétés des séries dodécaphoniques tous-intervalles, car il contient le catalogue complet des 1928 séries ayant cette propriété remarquable. Cependant, au-delà de l'exhausti-

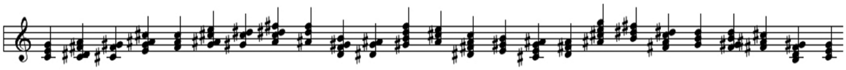
---

17. F. Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Verlag von Andreas Deichert, Erlangen, 1872.
18. H. Eimert, *Grundlagen der musikalischen Reihentechnik*, die Reihe, Universal éd., 1964.

vité, la démarche d'Eimert ne semble pas donner une indication précise sur la stratégie employée dans l'établissement d'un tel catalogue. Les recherches menées presque à la même époque en France et aux États-Unis respectivement par André Riotte[19] et par Robert Morris et Daniel Starr[20] ont permis de mieux comprendre le caractère algébrique sous-jacent à un tel problème théorique, en essayant d'apporter des éléments nouveaux en ce qui concerne ses aspects algorithmiques[21].

Cependant, il est tout à fait surprenant d'observer qu'historiquement le problème d'établir un tel catalogue n'a pas été posé et résolu dans le cadre de la technique dodécaphonique. Le traité de modulation du compositeur danois Thorvald Otterström[22] offre, en effet, un catalogue exhaustif des séries tous-intervalles établies à partir de considérations algébriques sur la nature combinatoire du système tempéré, mais sans aucune référence à la technique sérielle. L'analyse des stratégies théoriques développées dans cet ouvrage nous offre un bon exemple de formalisation algébrique d'un problème musical qui a émergé de considérations différentes de celles qui s'imposeront par la suite dans la recherche musicale. Le problème posé par Otterström concerne le calcul des progressions harmoniques permettant de moduler vers les douze tonalités sans répétition des distances intervalliques entre ces tonalités. Un exemple d'une telle progression harmonique est donné en figure suivante (figure 5), dans laquelle nous avons représenté chaque tonalité ainsi que chaque intervalle entre les tonalités avec une classe de résidus (modulo 12). Dans les deux

19. Riotte, A., « Génération des cycles équilibrés », Rapport interne n° 353, Euratom, Ispra, 1963.
20. Morris, Robert ; Starr, Daniel, « The Structure of All-Interval Series », *Journal of Music Theory*, 18(2), 1974, p. 364-389.
21. Notons, cependant, que le problème du calcul du catalogue des solutions via une approche algébrique « constructif » reste un problème ouvert, la démarche privilégiée étant basée sur des techniques de *backtracking* et de programmation par contraintes (C. Truchet, *Contraintes, recherche locale et composition assistée par ordinateur*, thèse de doctorat, Paris VII, 2004).
22. Otterström, Thorvald, *A Theory of modulation*, The University of Chicago, 1935.

cas, on obtient une séquence de nombres qui sont tous différents (sauf la répétition de l'intervalle 6, le triton, dans la suite des différences)[23].

do do# fa sol# la# ré# la mi ré si sol fa# (do)

0 1 5 8 10 3 9 4 2 11 7 6 (0)

1 4 3 2 5 6 7 10 9 8 11 (6)

Figure 5 – Une progression harmonique « tous-intervalles » codée en termes de classes de hauteurs (première suite numérique) et de classes d'intervalles (deuxième suite numérique).

Le traité de Otterström offre des tables de classification exhaustive des modulations ayant les propriétés précédentes, et suggère comment généraliser ce cas à des groupes cycliques d'ordre $n \leq 12$. Il soulève cependant des doutes en ce qui concerne la possibilité d'obtenir une formule d'énumération exhaustive de telles progressions[24]. Les temps étaient, évidemment, prématurés, car une telle formule ne serait arrivée qu'aux années quatre-vingt-dix grâce aux recherches d'algèbre combinatoire appliquée à la musique d'Harald Fripertinger (1992)[25].

---

23. La répétition de l'intervalle de triton entre la dernière note et la première note de la séquence des tonalités est une propriété de toute série tous-intervalles car 1+2+…+11=(12x11)/2=66, ce qui est équivalent à 6 modulo 12.
24. Comme l'auteur l'affirme en conclusion de son traité, il s'agit d'un « problème de partition qui n'admet probablement aucune formule ».
25. Fripertinger, Harald, « Enumeration in Musical Theory », *Beiträge zur Elektr. Musik*, 1, 1992. Notons que le problème d'énumération des séries tous-intervalles a été résolu par Harald Fripertinger de façon « structurale », car le formules obtenues dépendent de l'action d'un groupe sur l'espace combinatoire des séries dodécaphoniques. Autrement dit, le nombre de solutions varie selon le type de groupe utilisé pour établir une relation d'équivalence formelle entre deux structures musicales. On reviendra dans la suite sur l'approche « paradigmatique », qui constitue notre démarche privilégiée dans l'implémentation des méthodes algébriques en informatique musicale. Franck Jedrzejewski a proposé récemment une nouvelle représentation topologique des séries tous-intervalles basée sur la théorie des tresses. Le

Méthodes algébriques en théorie et analyse musicales

À l'intérieur de l'approche algébrique en analyse musicale, deux théories ont acquis une place considérable dans la réflexion analytique contemporaine : la Set Theory d'Allen Forte et l'analyse transformationnelle de David Lewin. À la différence des présentations traditionnelles de la Set Theory[26], la théorie des ensembles de classes de hauteurs se prête très bien à être intégrée dans une approche algébrique qui utilise pleinement les potentialités de la représentation circulaire du tempérament égal. En outre, une formalisation algébrique des concepts de base de cette approche offre des perspectives théoriques nouvelles sur l'analyse musicale assistée par ordinateur. L'implémentation[27], réalisée en OpenMusic, se déploie dans une architecture « paradigmatique » basée sur l'action de certains groupes « mathémusicaux » sur l'espace tempéré (le groupe cyclique en tant qu'ensemble dépourvu de structure algébrique). L'implémentation permet à l'analyste de choisir son propre critère d'équivalence entre structures d'accords en utilisant comme

---

catalogue des 1928 possibilités se réduit ainsi à une collection de 63 configurations différentes (appelées « diagrammes de cordes »). Chaque diagramme code une famille de série tous-intervalles et ses transformations dodécaphoniques (transpositions, inversions, rétrogradations, et une combinaison de ces trois opérations). Voir Jedrzejewski (F. Jedrzejewski, *Mathematical Theory of Music*, Collection « Musique/Sciences », Ircam/ Delatour, 2007) pour le catalogue complet des 63 diagrammes de cordes associés aux séries tous-intervalles.

26. Voir Forte (A. Forte, *The Structure of Atonal Music*, New Haven, Yale University Press, 1973), Rahn (J. Rahn, *Basic Atonal Theory*, New York, Longman, 1980), Morris (R. Morris, *Composition with Pitch-Classes : A Theory of Compositional Design*, New Haven, Yale University Press, 1987) et Straus (J. Straus, *Introduction to post-tonal theory*, Prentice-Hall, New Jersey, 1990).
27. Cette implémentation, ainsi que toutes les implémentations que nous avons intégrées au *package* « MathTools » de *OpenMusic* (version 5.0 et suivantes), a été conçue en collaboration avec Carlos Agon (informaticien et chercheur à l'IRCAM). Une première tentative d'implémentation de l'approche paradigmatique pour l'analyse assistée par ordinateur avait été réalisée en collaboration avec Killian Sprotte (compositeur), dans le cadre de la librairie « OMGroups ».

« paradigmes[28] » d'analyse les différents groupes que l'on peut choisir de faire opérer sur l'ensemble des notes. En particulier, nous avons implémenté les relations d'équivalence (donc les catalogues d'accords) induites par l'action de quatre groupes sur l'ensemble des notes d'un tempérament musical choisi : le groupe cyclique (ou paradigme de l'équivalence à une transposition musicale près), le groupe dihédral (paradigme de la Set Theory, i.e. équivalence à une transposition et/ou une inversion près), le groupe affine (équivalence à une multiplication près) et le groupe symétrique (équivalence à une permutation près). L'architecture paradigmatique de cet environnement est décrite dans la figure suivante (figure 6) qui montre les représentations circulaires et les structures intervalliques associées aux différentes classes d'équivalence d'un même accord ainsi que les quatre types de catalogue d'accords associés à chaque action de groupe.

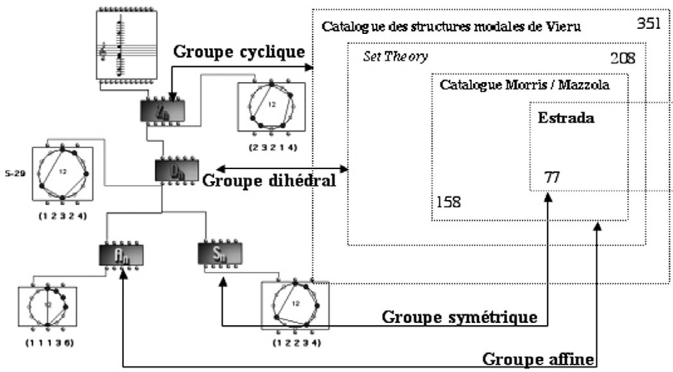


Figure 6 – Architecture « paradigmatique » en *OpenMusic* pour l'analyse musicale assistée par ordinateur via l'action des groupes sur l'espace Z/12Z.

28. Le terme « paradigmatique » renvoie à la fois au concept d'analyse musicale « paradigmatique » au sens de Nicolas Ruwet (N. Ruwet, « Méthodes d'analyse en musicologie », *Revue belge de Musicologie*, 20, 1966, p. 65-90) mais aussi au concept de « paradigme » chez Thomas Kuhn (T. Kuhn, *The Structure of Scientific Revolutions*, University of Chicago Press, 1962). Un catalogue d'accords, ainsi qu'une théorie scientifique, est valable à l'intérieur d'un univers conceptuel (ou paradigme) et ce sont précisément les structures de groupes qui permettent de formaliser la notion d'équivalence entre les éléments du catalogue.

Les quatre groupes (cyclique, dihédral, affine et symétrique) engendrent quatre catalogues d'accords de taille de plus en plus petite. On retrouve ainsi, comme cas particulier, la *Set Theory* d'Allen Forte, ou action du groupe dihédrale $\mathbf{D_{12}}$ sur l'espace tempéré. On en déduit qu'un catalogue (et donc un paradigme) peut être plus ou moins pertinent selon de type de contexte qu'il essaie de décrire. Par exemple, le « paradigme » du groupe dihédral s'applique de façon plus naturelle au répertoire « atonal », comme l'ont bien montré André Riotte et Marcel Mesnage dans leur approche computationnelle de la modélisation informatique des partitions (figure 7)[29].

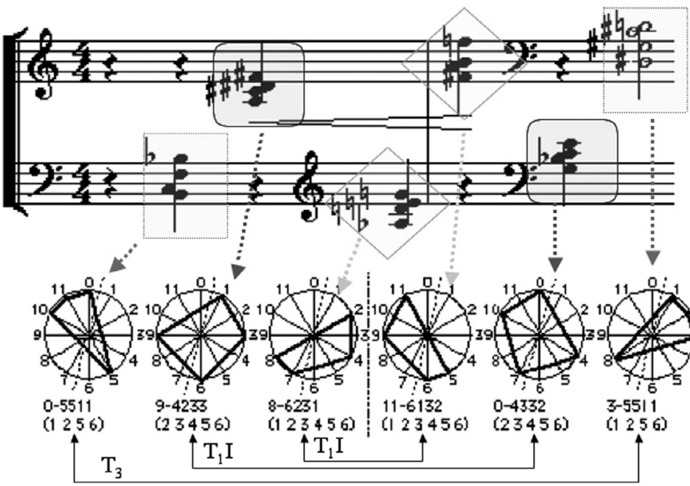


Figure 7 – Analyse assistée par ordinateur d'un extrait du *Klavierstück* op. 33a d'Arnold Schoenberg (1929). Les six accords se distribuent dans les deux mesures de façon symétriques selon le « paradigme » du groupe dihédral.

À titre d'exemple, nous donnons en figure 8 l'énumération des classes d'équivalence d'accords selon le paradigme de l'action du

29. Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage qui ressemble les contributions d'André Riotte et Marcel Mesnage dans la formalisation et modélisation des structures musicales (A. Riotte ; M. Mesnage, *Formalismes et Modèles* (en deux tomes), Collection « Musique/Sciences », Ircam/Delatour France, 2006).

groupe dihédral dans le système tempéré à 12 et 24 degrés. Notons le caractère symétrique de la distribution des orbites, une caractéristique que l'on retrouve dans la distribution des orbites sous l'action des groupes cyclique et affine mais que l'on perd dans le cas de l'action du groupe symétrique S_n sur l'espace des structures intervalliques[30].

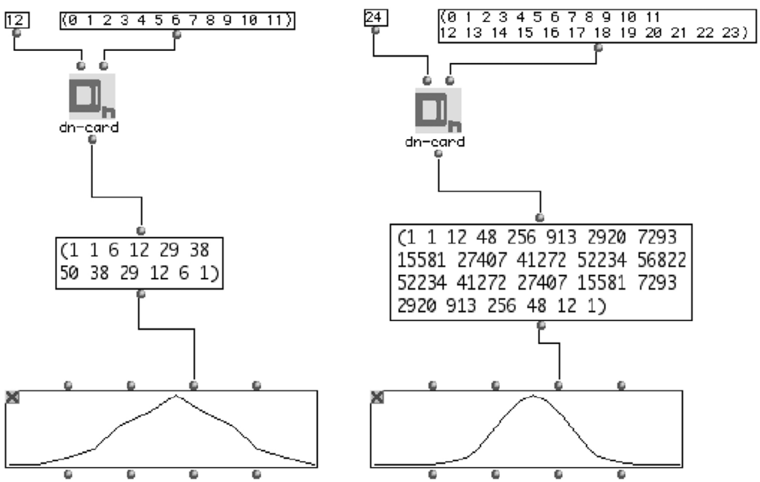


Figure 8 – Distribution du nombre d'orbites sous l'action du groupe dihédral Dn dans le cas de la division de l'octave en 12 et en 24 parties égales.

Si c'est vrai, comme l'affirme Milton Babbitt dans le cas du système dodécaphonique, qu'un « large nombre de conséquences compositionnelles sont dérivables directement de théorèmes de la théorie des groupes finis »[31], dans le cas du problème de la clas-

30. Dans l'exemple de l'accord représenté dans l'architecture paradigmatique, la structure intervallique (1 2 2 3 4) sera donc équivalente à toutes ses permutations. Et puisque la somme des éléments d'une structure intervallique est égale à 12 par définition, le catalogue d'accords sous l'action du groupe symétrique S_n coïncide donc avec l'ensemble des 77 partitions de 12.

31. M. Babbitt, « Set Structure as a Compositional Determinant », *Journal of Music Theory*, 5(2), 1961, p. 72-94.

sification d'accords dans un tempérament égal, c'est un lemme (Lemme de Burnside[32]) qui est à la base de toute formule d'énumération. Ce lemme affirme que lorsqu'on a une action d'un groupe G sur un ensemble X, le nombre total d'orbites $\#Orb$ est la « moyenne » des fixateurs des éléments du groupe, où le fixateur X_g d'un élément g de G est l'ensemble des éléments x de X tels que $gx=x$. Pour comprendre la portée opératoire d'un tel résultat, considérons l'exemple suivant[33].

Exemple. Étant donné trois couleurs, trouver le nombre de configurations possible d'un carré ayant ses sommets colorés et de telle façon que deux configurations sont équivalentes si l'on peut passer de l'un à l'autre par une rotation du carré d'un angle qui est multiple de 90°. En appliquant le Lemme de Burnside on peut démontrer qu'il y a, au total, 24 configurations possibles. Une de ces configurations est donnée en figure 9.

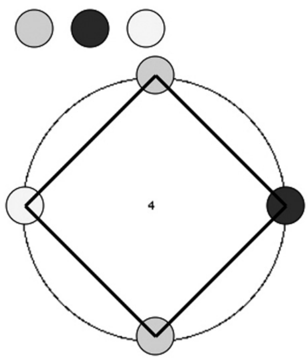


Figure 9 – Une parmi les 24 différentes façons de disposer trois couleurs dans quatre sommets d'un carré inscrit dans un cercle.

32. Ou « Lemme qui n'est pas de Burnside », si c'est vrai, comme l'affirme Neumann (P. M. Neumann, « A Lemma that is not Burnside's », *Math. Scientist*, 4, 1979, p. 133-141), que ce résultat était, en réalité, connu bien avant Burnside.
33. Le lecteur accro au Sudoku sera, peut-être, heureux de découvrir dans cette note de bas de page qu'il n'y a que 5.472.730.538 = 5x10^9 solutions possibles, comme l'on récemment montré Bertram Felgenhauer et Fraze Jarvis en utilisant le Lemme de Burnside. Voir à l'adresse : <http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/>

En effet, il suffit de considérer l'action du groupe cyclique **Z/4Z** sur l'espace des $3^4 = 81$ configurations possibles. Les quatre éléments du groupe **Z/4Z** sont les rotations T_1, T_2, T_3, et T_4, respectivement de 90°, 180°, 270° et 360° (autour du centre). Cette dernière rotation (l'identité ou élément neutre du groupe) fixe toute configuration. La configuration T_1 fixe toute configuration monochrome. L'ensemble fixateur X_g par rapport à l'application $g= T_1$ contient donc 3 éléments (car il n'y a que trois couleurs différentes). De même pour la rotation T_3 tandis que la rotation T_2 ne fixe que de configurations « double-diamètre », c'est-à-dire des configurations non monochromes du carré dans lesquelles les deux couples de sommets opposés ont les mêmes couleurs. On obtient ainsi $\#Orb = (81+3+3+9)/4 = 24$.

Exemple d'application musicale du Lemme de Burnside : formule d'énumération pour les modes à transpositions limitées

Une fois implémentés dans un langage de programmation pour la composition assistée par ordinateur, les outils mathématiques issus de la théorie de l'énumération de Burnside et Polya offrent aux compositeurs la possibilité de mieux comprendre la richesse combinatoire d'un espace tempéré à n degrés. En outre, en utilisant les mêmes outils, on peut établir des formules d'énumération des « classes » d'accords ayant des propriétés d'invariance par rapport à une ou plusieurs transformations musicales (transposition, inversion, passage au complémentaire, …). Par exemple, en suivant Read[34] ou Broué[35], il est possible de donner une formule explicite pour le calcul de la cardinalité de l'ensemble d'accords ayant une propriété d'invariance transposition-

34. R.C. Read, « Combinatorial problems in the theory of music », *Discrete Math.*, 167/168, n° 1-3, 1997, p. 543-551.
35. M. Broué, « Les tonalités musicales vues par un mathématicien », dans « Le temps des savoirs », *Revue de l'Institut Universitaire de France*, 4, D. Rousseau et M. Morvan éds., Paris, Odile Jacob, 2002, p. 37-78.

nelle dans toute division de l'octave en un nombre n de parties égales. Pour tout diviseur d de n, le nombre M_d d'accords ayant une propriété d'invariance par rapport à la transposition T_d de d « demi-tons » est donné par la formule :

$$\mathbf{M_d = d^{-1}\Sigma\mu(n/k)2^k}$$

où la somme est faite sur les entiers k qui divisent 12 et μ est la fonction de Möbius[36]. Par exemple, dans le cas n=12, on a 9 accords qui sont des modes de Messiaen de période égale à 6 car :

$$6M_6 = 2\mu(6) + 4\mu(3) + 8\mu(2) + 64\mu(2)+64\mu(1) = (-1)^2 2 + (-1)2^2 + (-1)2^3 + 2^2 = 54$$

ce qui donne M_6 = 9. Les 9 structures musicales ayant cette propriété d'invariance transpositionnelle par rapport à l'intervalle de triton sont données en figure 10 :

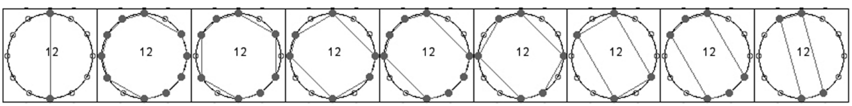


Figure 10 – Catalogue des modes de Messiaen
à transpositions limitées ayant une propriété d'invariance
par rapport à la transposition T_6 au triton.

Notons que la formule d'énumération ne nous dit rien par rapport au problème de la construction effective de ces modes. Autrement dit, résoudre un problème d'énumération des structures musicales n'implique pas de savoir résoudre le problème de leur calcul explicite. De plus, dans le cas particulier de ces structures symétriques, une stratégie de calcul basée sur la simple définition d'invariance transpositionnelle n'est pas opérationnelle, car elle conduit très vite à l'explosion combina-

36. Par définition, la fonction de Möbius $\mu(x)$ est égale à 0 si x est divisible par un carré ou bien $(-1)^q$ si x est le produit de q nombres premiers distincts.

toire[37]. Deux autres stratégies, que nous allons décrire brièvement, s'avèrent plus performantes.

Calcul du catalogue des modes à transpositions limitées par multiplication d'accords

L'opération de multiplication d'accords a été historiquement introduite par Boulez comme un processus sériel à travers lequel le compositeur pouvait faire proliférer le matériau tout en gardant une cohérence « intervallique » dans les séries dérivées[38]. Cette opération, formellement équivalente au concept de « combinaison transpositionnelle » [*transpositional combination*] dans la tradition américaine[39], est défini *more algebrico* par Anatol Vieru[40] avec le terme de « composition » et à plusieurs niveaux d'abstractions. Une première définition de l'opération de « composition » concerne le rapport entre une structure intervallique et une note. « Composer » une structure intervallique et une note signifie tout simplement restituer la gamme musicale qui est représentée par une telle structure, gamme qui aura comme première note la note choisie. En modifiant légèrement la notation introduite par Vieru, nous noterons l'opération de « composition » par le symbole « • ». La figure suivante montre la composition entre la structure (1 2 3 1 2 3) et la note *do*, représentée, par simple convention, par l'entier 0 (entre accolades).

37. Rappelons que, par définition, un mode à transpositions limitées est un sous-ensemble A de **Z/12Z** pour lequel il existe une transposition T_d avec $d \neq 0$ vérifiant l'équation : $T_d(A)=A$. Afin de calculer le catalogue des modes à transposition limitées en se basant sur cette définition, il est donc nécessaire d'avoir accès à l'espace des sous-ensembles de **Z/12Z** dont la cardinalité augmente de façon exponentielle avec le nombre n de divisions de l'octave en parties égales.
38. P. Boulez, *Penser la musique aujourd'hui,* Paris : Gallimard, 1963.
39. Voir, par exemple R. Cohn, *Transpositional combination in twentieth-century music,* PhD thesis, University of Rochester, Eastmann School of Music, 1986.
40. Vieru, Anatol, *Cartea modurilor, 1* (Le livre des modes, 1), Bucarest : ed. muzicala, 1980.

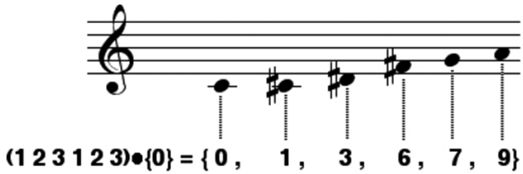


Figure 11 – Une composition entre une structure intervallique et une classe de hauteur.

Un degré d'abstraction supérieur consiste à « composer » une structure intervallique avec un mode, c'est-à-dire un ensemble de classes de résidus ayant plus d'un élément. Il suffit de composer la structure intervallique avec les éléments qui constituent le mode et de prendre enfin l'union des résultats obtenus. La figure suivante montre la structure intervallique (6 6) correspondant à deux notes distantes d'un triton « composées » avec le mode {0, 1, 3}. Formellement, on obtient :

$$(6\ 6) \square \{0, 1, 3\}=((6\ 6) \square \{0\})\cup((6\ 6) \square \{1\})\cup((6\ 6) \square \{3\})$$
$$=\{0,6\}\cup\{1,7\}\cup\{3,9\}=\{0, 1, 3, 6, 7, 9\}.$$

Notons que le résultat de la « composition » est donc le même mode à transposition limitée que de la figure précédente :

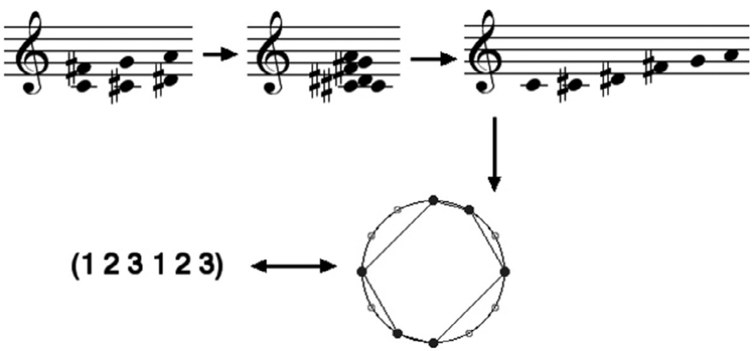


Figure 12 – Un accord invariant par transposition obtenu à partir d'une « composition » entre la structure intervallique (6 6) et le mode {0, 1, 3}.

La troisième étape dans la définition de l'opération de « composition » consiste à la définir directement sur les structures intervalliques. À la différence des cas précédents, le résultat sera cette fois une structure intervallique, ce qui exprime très bien la volonté, de la part du théoricien roumain, d'entrer plus profondément dans une des dualités fondamentales en musique : la dualité sons/intervalles.

Par définition, composer deux structures intervalliques signifie faire la « composition » entre une des deux structures et n'importe quel mode représenté par l'autre structure. Par exemple, composer la structure (6 6) avec la structure (1 2 9) consiste à prendre d'abord un mode représenté par l'une des deux structures (par exemple le mode {0, 1, 3} représenté par la deuxième structure intervallique) et composer la première structure avec ce mode. Le mode ainsi obtenu est ensuite transformé en sa structure intervallique correspondante. Dans l'exemple choisi, on est ramené simplement à calculer la structure intervallique du mode {0, 1, 3, 6, 7, 9}, c'est-à-dire (1 2 3 1 2 3). On peut donc écrire formellement :

(6 6) • (1 2 9)= (1 2 3 1 2 3).

Cette opération est bien définie car elle ne dépend pas du représentant choisi. Autrement dit, si au lieu de prendre le mode {0, 1, 3} on considère un autre mode, par exemple {1, 2, 4}, représenté par la même structure intervallique (1 2 9), le résultat de l'opération de composition est le même (à une transposition près !), comme le montre la figure suivante (figure 13).

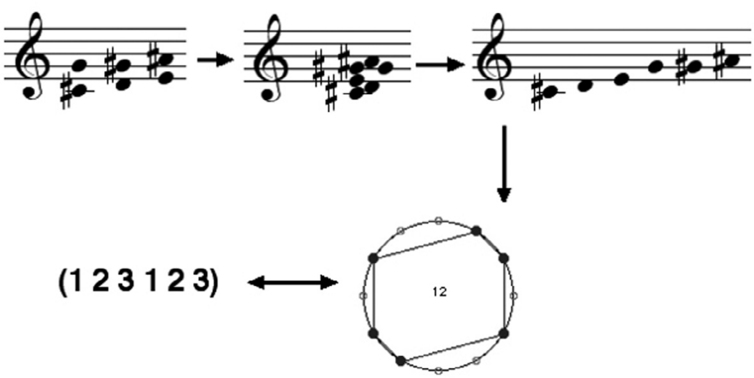


Figure 13 – Changement de représentant dans le calcul
de la composition des deux structures intervalliques (6 6) et (1 2 9).

En termes algébriques, l'opération de « composition » est une loi de composition interne dans l'ensemble des structures intervalliques et elle permet de munir cet espace d'une structure de *monoïde commutatif* avec élément unitaire[41]. La multiplication d'accords que nous venons de définir est un outil opérationnel extrêmement puissant pour calculer le catalogue exhaustif des modes à transposition limitée. Pour cela il faut d'abord introduire une famille très particulière de structures intervalliques, qu'on retrouve dans la littérature sous des noms différents[42]. Il s'agit des structures que l'on peut exprimer à l'aide d'un seul intervalle ou bien, en utilisant une terminologie plus mathématique, qui sont associées à des modes « engendrés » par un élément du groupe cyclique **Z/12Z**.

Elles sont donc de la forme A=(a a a … a), où l'élément a est répété un nombre fini de fois (au plus 12 dans le cas de la division de l'octave en 12 parties égales). Toute structure « idempotente » correspond à des modes ou à des accords bien connus en musique, comme le montre l'énumération suivante :

A_1=(1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1) ou total chromatique
A_2=(2 2 2 2 2 2) ou gamme par tons
A_3=(3 3 3 3) ou accord diminué
A_4=(4 4 4) ou accord augmenté
A_6=(6 6) ou triton

41. La « composition » est associative, commutative et l'élément unitaire est la structure intervallique correspondant à un mode ayant une seule classe de hauteurs. Il lui manque l'axiome de l'inverse pour être un *groupe*, autrement dit, étant donné une structure intervallique, on ne peut pas trouver la structure qui « composée » à celle de départ restitue l'élément identité, c'est-à-dire la structure correspondant à la note simple.

42. Maciej Zalewski (1972) les appelle « structures monomorphes », tandis que Vuza (D. T. Vuza, « Aspects mathématiques dans la théorie modale d'Anatol Vieru, *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 27, n° 10, 1982, p. 1091-1099) utilise le terme « idempotentes » qui mieux exprime le comportement vis-à-vis de l'opération de « composition ». Par définition, une structure intervallique A est idempotente par rapport à l'opération de composition « □ » si A □ $A = A$.

Intuitivement, les structures idempotentes jouent dans la construction des modes à transposition limitée le rôle joué par les nombres premiers dans la construction des nombres entiers. Tout nombre entier est décomposable, d'une façon unique, dans le produit de puissances de nombres premiers. Ainsi, tout mode à transposition limitée s'obtient en faisant la « composition » d'un mode quelconque avec une structure idempotente. Cet algorithme permet donc de calculer le catalogue des modes de Messiaen en maximum *6c* opérations, où *c* est la cardinalité du catalogue d'accords à une transposition près. L'algorithme n'est pas optimal car l'entier *c* croît de façon exponentielle avec la taille *n* de l'espace tempéré. En fait, une application du Lemme de Burnside donne :

$$\mathbf{c = n^{-1}} \boldsymbol{\Sigma\varphi}(\mathbf{d})2^{\mathbf{n/d}}$$

où la somme est faite sur les diviseurs de n et $\varphi(d)$ est la fonction indicatrice d'Euler[43].

Calcul du catalogue des modes à transpositions limitées via la structure intervallique

Nous avons amplement discuté l'importance de la structure intervallique d'un accord en tant qu'invariant par rapport à la transposition. Au-delà de cet aspect, qui a été utilisé pour établir des catalogues exhaustifs d'accords à une transposition près[44], nous aimerions souligner ici une propriété de la structure intervallique permettant de réduire au minimum la complexité du problème de calcul des modes à transpositions limitées pour toute division de l'octave en *n* parties égales. La propriété peut être énoncée de la façon suivante :

43. Par définition l'indicatrice $\varphi(d)$ d'un entier positif d est égale au nombre d'entiers positifs inférieurs à d et premiers avec d.
44. Voir, en particulier, Vieru (A. Vieru, *op. cit.*, 1980).

*Un sous-ensemble A de **Z/nZ** est un mode de Messiaen ssi sa structure intervallique est redondante, i.e. elle est égale à une concaténation d'un même pattern*[45].

Tout comme la multiplication d'accords, cette propriété offre un algorithme constructif pour un catalogue des modes à transpositions limitées pour toute division de l'octave en n parties égales. De plus, comme nous l'avons mentionné, avec cet algorithme le problème d'une classification de ce type de structures est résoluble en temps polynomial. La figure suivante montre le résultat dans la division de l'octave en tiers de ton (i.e. n=18).

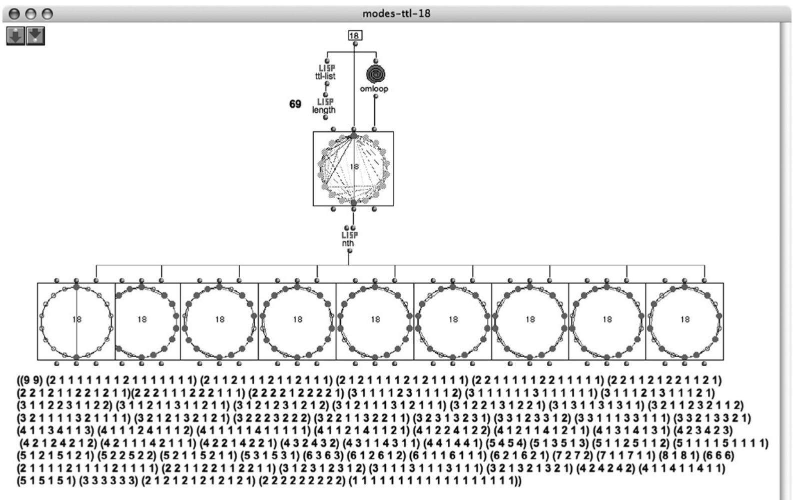


Figure 14 – Catalogue des 69 modes à transpositions limitées exprimés avec leurs structures intervalliques. Les 9 premières solutions du catalogue sont données à l'aide de la représentation circulaire.

---

45. Comme dans tout théorème dans lequel il y a une condition nécessaire et suffisante (si et seulement si), l'un des deux sens de l'implication logique est souvent plus facile à démontrer. Dans ce cas, on montre aisément que la condition sur la redondance de la structure intervallique est nécessaire. Autrement dit, si un ensemble M est un mode à transpositions limitées, alors sa structure intervallique sera du type (a_1 a_2 …a_k …a_1 a_2 …a_k), le facteur m de la transposition T_m rendant invariant le sous-ensemble étant égal à a_1+a_2+ …,+a_k. Nous laissons au lecteur l'exercice de montrer que la condition sur la structure intervallique est suffisante.

Approche algébrique et isomorphisme hauteurs/rythmes

Nous allons nous concentrer sur quelques aspects combinatoires en ce qui concerne la construction des canons rythmiques ayant la propriété de paver l'axe du temps (canons rythmiques mosaïques). Bien qu'historiquement on puisse trouver des antécédentes de cette forme musicale dans l'utilisation des rythmes non-retrogradables chez Messiaen[46], la structure des canons rythmiques mosaïques est profondément liée à la théorie modale d'Anatol Vieru, dont elle constitue, grâce aux intuitions de Dan Tudor Vuza, un exemple remarquable de « transfert de structure » au sens de Bourbaki. Il suffit, en effet, d'opérer un « transfert » de la structure de groupe cyclique dans le domaine des rythmes et interpréter ainsi la notion de factorisation d'un groupe cyclique en somme directe de deux sous-ensembles (figure 15)[47].

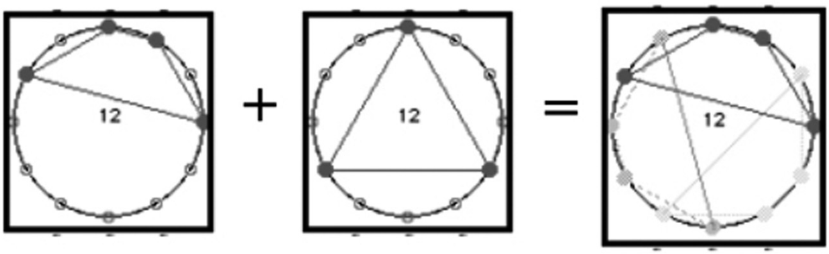


Figure 15 – Un exemple de factorisation du groupe cyclique d'ordre 12 en somme directe de deux sous-ensembles dont l'un est un sous-groupe.

En changeant le rôle des deux facteurs dans la représentation circulaire donnée en figure 15, nous pouvons tout d'abord construire deux « partitions » de l'espace tempéré, l'une constituée de trois transpositions d'un même tétracorde et l'autre de

46. O. Messiaen, *Traité de rythme, de couleur et d'ornithologie,* tome 2, Paris : Alphonse Leduc, Éditions Musicales, 1992.

47. Ou bien la notion, tout à fait équivalente dans ce cas, de multiplication d'accords que nous avons vue précédemment.

quatre transpositions d'un même accord augmenté. Ce double pavage harmonique est donné en figure 16 dans un patch *OpenMusic.*

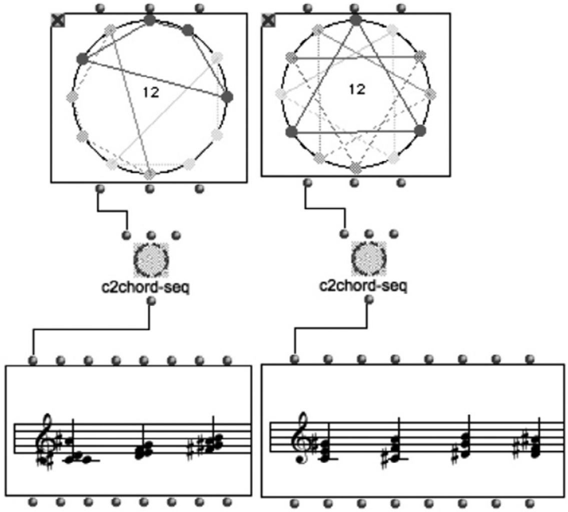


Figure 16 – Deux pavages harmoniques « duals » de l'espace chromatique.

En interprétant un sous-ensemble de **Z/12Z** comme un pattern rythmique périodique, il est ainsi possible de construire des canons rythmiques ayant la propriété de « paver » l'axe du temps tout en respectant les propriétés harmoniques des pavages précédents. On obtient ainsi des canons mélodico-rythmiques que l'on appellera « mosaïques » (figure 17).

Remarquons que, dans les deux cas, l'un des deux sous-ensembles est tel que son stabilisateur (par rapport à l'action du groupe cyclique) ne se réduit pas à l'identité[48]. Cette propriété est

48. Par définition, étant donné un groupe G qui opère sur l'ensemble X, le stabilisateur d'un sous-ensemble A de X est le sous-groupe $\mathrm{Stab}_A = \{g \in G : gA = A\}$. La propriété que nous venons d'énoncer dans le cas des deux factorisations précédentes est une version « compacte » de la propriété d'invariance transpositionnelle. Autrement dit, un sous-ensemble A de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un mode à transpositions limitées ssi son stabilisateur $\mathrm{Stab}_A \neq \{0\}$.

valable pour tous les groupes d'ordre n, avec n<72 (groupes de Hajós) et permet d'avoir des stratégies computationnelles pour obtenir des factorisations d'un groupe cyclique donné en somme directe de deux sous-ensembles quelconques. Le cas le plus simple est celui dans lequel l'un des facteurs est un sous-groupe. Nous allons analyser ce cas dans l'exemple suivant[49].

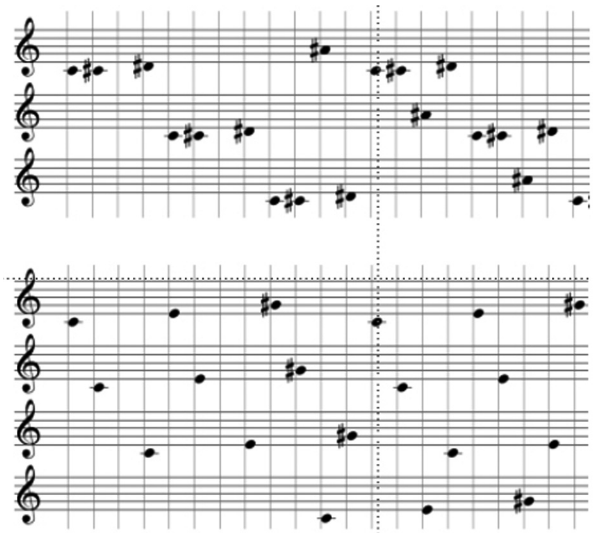


Figure 17 – Deux canons mélodico-rythmiques mosaïques isomorphes aux deux pavages harmoniques duals de la figure précédente.

Exemple : construction d'un canon mosaïque à partir d'une série tous-intervalles et d'une série tout court

Prenons une série tous-intervalles quelconque, par exemple la série dodécaphonique associée à la suite d'intervalles suivants :

49. Cette technique de construction de canons mosaïques est inédite et elle a été « découverte » en préparant l'intervention pour le colloque qui est à l'origine de ce papier. Bien qu'elle soit née, comme l'exemple le montre, à partir de considérations sur les séries tous-intervalles, la technique s'applique également à toute série dodécaphonique comme nous l'a suggéré Wiebke Drenckhan que nous remercions ici pour cette précieuse remarque.

*S**=(1,4,3,2,5,6,7,10,9,8,11,*6*). Rappelons que l'intervalle de triton (6) est répété deux fois car il sépare toujours la dernière note de la série de la première. En sommant tous les intervalles, y compris le triton final, nous obtenons 72. En faisant la multiplication d'accords entre *S** et une note de départ, par exemple {0} on obtient un sous-ensemble *A* du groupe cyclique d'ordre 72 qui pave avec le sous-groupe de **Z/72Z** ayant 6 éléments. Et puisque tout sous-groupe d'un groupe cyclique est un groupe cyclique, *B* sera représenté par un hexagone régulier inscrit dans le cercle divisé en 72 parties (voir figure 18).

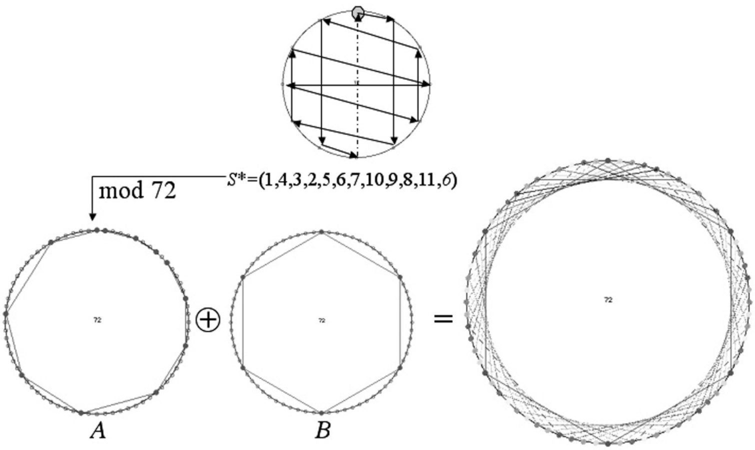


Figure 18 – Factorisation du groupe cyclique d'ordre 72
en somme directe d'un sous-groupe cyclique (*B*)
et d'un sous-ensemble *A* obtenu par « dépliement »
d'une série tous-intervalles.

Cette construction est intéressante car tout à fait générale, et en fait elle s'applique à n'importe quelle série. Nous pouvons, en effet, prendre comme cellule génératrice une permutation quelconque des entiers 0, …, 11. Considérons, par exemple, la série du cinquième mouvement de la *Sérenade*, op. 24 d'Arnold Schoenberg. Comme, dans l'exemple précédent, on peut lui associer la série *S** des intervalles et interpréter cette dernière séquence numérique comme un sous-ensemble *S* du groupe cyclique d'ordre 72. Cet ensemble pave avec le même sous-groupe *B* que l'exemple précédent, comme le montre la figure suivante.

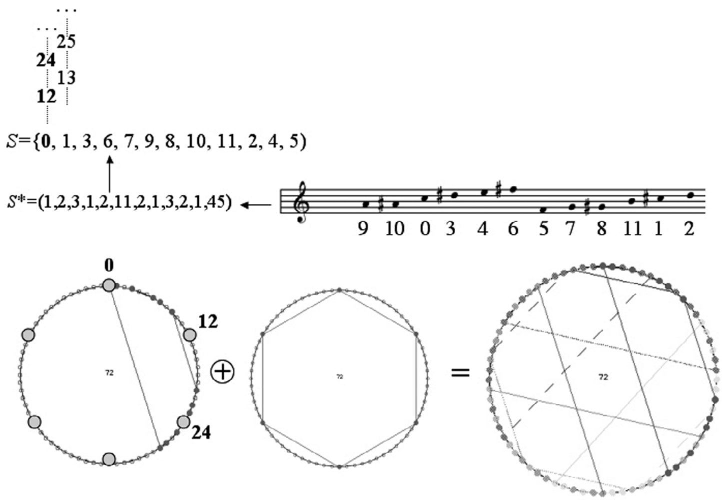


Figure 19 – Factorisation du groupe cyclique d'ordre 72
en somme directe d'un sous-groupe cyclique et d'un sous-ensemble
obtenu par « dépliement » d'une série dodécaphonique quelconque.

Notons que dans les deux cas précédents, les sous-ensembles de **Z/72Z** qui pavent le groupe cyclique d'ordre 72 avec le même sous-groupe cyclique sont deux exemples de rythmes 12-asymétriques dans le sens de Hall et Klingsberg (2004). Par définition, un rythme périodique *R* de période *kh* (c'est-à-dire un sous-ensemble *R* de **Z/*kh*Z**) est *k*-asymétrique si la propriété suivante est satisfaite :

> *Si une attaque de R occupe la position x, alors toutes les autres positions y telles que y≡x mod h ne correspondent pas à des attaques du rythme R.*

Par extension, on appellera « canon *k*-asymétrique » un canon mosaïque obtenu à partir d'un rythme *k*-asymétrique[50]. Il s'agit

50. E. Gilbert, « Polynômes cyclotomiques, canons mosaïques et rythmes k-asymétriques », Mémoire de Master ATIAM, 2007.

du cas le plus simple dans la construction des canons mosaïques car les sous-groupes d'un groupe cyclique sont très faciles à construire et il existe une formule d'énumération pour le catalogue des rythmes *k*-asymétriques[51]. D'autres cas s'avèrent bien plus difficiles. Nous avons donné une classification exhaustive des solutions dans le cas de la factorisation du groupe cyclique **Z/72Z** en deux sous-ensembles non périodiques, la valeur 72 étant le plus petit ordre d'un groupe n'ayant pas la propriété de Hajós, ce qui conduit à la famille des « Canons Réguliers Complémentaires de Catégorie Maximale » (en abrégé Canons RCCM), introduits dans Vuza[52]. Cette classification a été établie par rapport à l'action de trois groupes différents sur le groupe cyclique d'ordre 72, considéré comme ensemble : le groupe cyclique, le groupe dihédral et le groupe affine[53]. Dans le premier cas, la famille des sous-ensembles R et S comprend respectivement 6 et 3 solutions, pour un total de 18 canons rythmiques différents. Le nombre de canons RCCM se réduit à 9 si l'on considère l'action du groupe dihédral sur **Z/72Z**, les familles des sous ensembles R et S ayant trois éléments chacune. Dans le cas du groupe affine opérant sur **Z/72Z**, l'espace des solutions pour R et S se réduit respectivement à un sous-ensemble et à deux sous-ensembles. On obtient ainsi le résultat surprenant qui affirme l'existence de deux seuls canons rythmiques mosaïques (à une application affine près). La classification paradigmatique, ainsi que l'un des canons rythmiques correspondants à l'une des deux solutions (modulo une application affine), est donnée en figure 20.

---

51. Une fois de plus, il s'agit d'une application musicale du Lemme de Burnside (voir R. W. Hall ; P. Klingsberg, « Asymmetric Rhythms, Tiling Canons, and Burnside's Lemma », *Bridges Proceedings*, Winfield, Kansas, 2004, p. 189-194).
52. D. T. Vuza, « Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons », *Perspectives of New Music*, 29(2), 1991, p. 22-49.
53. À la différence de l'approche paradigmatique dans la classification d'accords, pour les canons rythmiques mosaïques nous ne pouvons pas utiliser l'action du groupe symétrique sur l'espace des structures intervalliques, car cette action ne préserve pas la propriété de pavage de l'axe du temps.

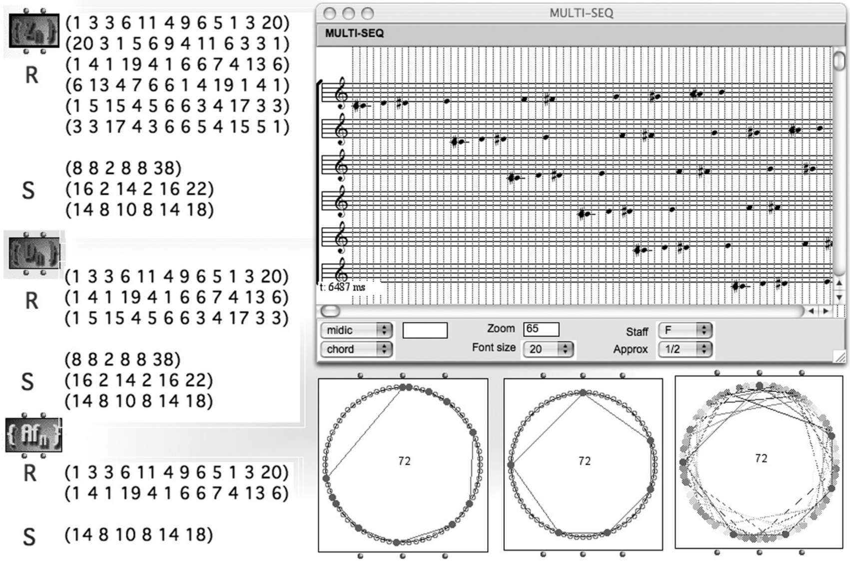


Figure 20 – Classification paradigmatique des solutions
pour la factorisation du groupe cyclique d'ordre 72
en somme directe de deux sous-ensembles non périodiques.

Notons que les outils mathématiques à la base de la construction des canons RCCM semblent avoir fasciner les mathématiciens indépendamment de toute application compositionnelle. Par exemple, François Le Lionnais[54] compte n = 72 parmi les nombres « remarquables » à cause précisément du fait que « le groupe cyclique à soixante-douze éléments se décompose sous la forme S + T avec S, T non-périodiques ». En citant l'ouvrage sur les groupes abéliens de L. Fuchs[55], il propose la décomposition suivante :

S = {0, 8, 16, 18, 26, 34}
T = {0, 1, 5, 6, 12, 25, 29, 36, 42, 48, 49, 53}

Cette factorisation correspond, en effet, à une des possibles solutions données en figure 20. En général, la liste des solutions

54. Le Lionnais, François, *Les Nombres remarquables*, Paris, Hermann, 1983.
55. L. Fuchs, *Abelian groups*, Oxford, Pergamon Press, 1960.

données par l'algorithme de Vuza n'est malheureusement pas exhaustive, comme les travaux d'autres mathématiciens ont récemment montré[56]. Autrement dit, mis à part les deux premiers groupes cycliques n'ayant pas la propriété d'Hajós, i.e. **Z/72Z** et **Z/108Z** (pour lesquels le catalogue des solutions données par l'algorithme de Vuza correspond à la liste exhaustive des factorisations des deux groupes en somme directe de deux sous-ensembles), il y a des canons RCCM qui ne sont pas des canons de Vuza, c'est-à-dire qui ne sont pas une solution donnée par l'algorithme de Vuza. La recherche d'un algorithme capable d'obtenir toutes les factorisations possibles d'un groupe n'ayant pas la propriété d'Hajós, ainsi que la question de l'existence d'une formule d'énumération des solutions, constituent deux problèmes ouverts[57].

Calcul catégoriel en musique : analyse transformationnelle et réseaux de Klumpenhouwer

Bien que la théorie des catégories et des topoï ait déjà une place bien consolidée en théorie mathématique de la musique[58], il nous semble qu'une introduction aux méthodes catégorielles en

---

56. Voir, en particulier Fripertinger (H. Fripertinger, « Enumeration of non-isomorphic canons », *Tatra Mt. Math. Publ.*, 23, 2001, p. 47-57) et Amiot (E. Amiot, « À propos des canons rythmiques mosaïques », *Gazette des mathématiciens,* 2005, p. 106).
57. Voir Amiot (E. Amiot, *ibid.*) et Andreatta (M. Andreatta, « De la Conjecture de Minkowski aux Canons Rythmiques Mosaïques », *L'Ouvert*, n° 114, mars 2006, p. 51-61) pour une analyse des rapports entre le problème de la construction des canons RCCM et quelques conjectures mathématiques célèbres (en particulier la conjecture de Minkowski et celle de Fuglede). Voir également Gilbert (E. Gilbert, *op. cit.*, 2007) pour une étude récente sur quelques aspects théoriques et informatiques du problème de la construction des canons rythmiques mosaïques.
58. Le lecteur n'ayant pas le courage de se lancer dans la lecture de Mazzola (G. Mazzola, *op. cit.*, 2004) pourra se contenter de parcourir la préface dans laquelle l'auteur explique et défend le double emploi, à la fois mathématique et philosophique, du terme « topos » en théorie de la musique.

musique à partir de deux problèmes musicaux concrets puisse aider à mieux comprendre la portée conceptuelle de cette approche. Nous nous concentrerons d'abord sur un problème d'analyse musicale transformationnelle dont la solution proposée par David Lewin rappelle de près l'aspect « diagrammatique » typique de la théorie des catégories. Et si les liens avec la théorie des catégories seront plutôt métaphoriques dans ce premier exemple, dans lequel nous nous limitons en quelque sorte à « contempler » un réseau de transformations, le recours au calcul catégoriel sera explicité dans un deuxième exemple musical concernant, cette fois, les rapports entre des réseaux transformationnels ayant la même configuration de flèches.

Analyse du *Klavierstück III* de Karlheinz Stockhausen par David Lewin : de la représentation circulaire au réseau transformationnel

La théorie transformationnelle ne constitue pas uniquement une généralisation de l'approche « set-théorique » en analyse musicale. En soulignant la primauté du concept de *transformation* sur le concept d'*objet*, elle propose *de facto* une nouvelle définition de l'« espace musical ». Comme le souligne David Lewin dans *Generalized Musical Intervals and Transformations*[59], la théorie transformationnelle permet de remplacer le concept d'intervalle par celui de *transposition* dans un espace. Plus généralement, on peut remplacer le concept d'intervalle par celui d'espace musical abstrait sur lequel *opèrent* certaines transformations. Cette observation constitue le point de départ d'un véritable changement de paradigme par rapport à la démarche taxinomique de Forte, dans laquelle l'analyse déploie un réseau de relations ensemblistes entre (ensembles de) classes de hauteurs. L'analyse acquiert un caractère « opérationnel » qui consiste à mettre en évidence des propriétés structurelles entre ensembles de classes de hauteurs uniquement en termes des transformations sous-jacentes.

59. D. Lewin, *Generalized Musical Intervals and Transformations*, New Haven, Yale University Press, 1987.

Le changement de perspective par rapport à l'analyse ensembliste de Forte sera encore plus évident une fois étudiée la manière dont les transformations musicales sont organisées dans le processus analytique. Pour cela, on peut distinguer deux stratégies qualitativement différentes. Dans une première approche, les transformations sont organisées dans un ordre qui suit le déroulement temporel de la pièce. Cette vision « chronologique » de l'organisation des transformations est appelée « progression transformationnelle ». Dans une approche plus abstraite, les transformations constituent un réseau relationnel au sein duquel il est possible de définir plusieurs parcours distincts. On parlera alors de « réseau transformationnel ». Une analyse transformationnelle est donc une perspective « dialectique » entre la notion de progression et celle de réseau transformationnel. Précisons tout de suite qu'il ne s'agit pas de deux étapes qui se déroulent dans un ordre préétabli. Au contraire, l'intérêt de la démarche transformationnelle ouverte par Lewin réside dans les poids différents que les deux stratégies peuvent avoir dans le processus analytique. Nous allons donc étudier ces deux étapes tout d'abord séparément pour ensuite essayer de comprendre quelles formes d'interactions peuvent avoir lieu pendant l'analyse (et l'écoute) d'une pièce. La figure suivante (figure 21) reproduit les premières mesures du *Klavierstück III* avec le début d'un processus de segmentation « par imbrication ».

Outre à la structure intervallique (SI), dont nous avons déjà souligné les vertus computationnelles, deux autres « invariants » sont attachés aux trois accords qui constituent la segmentation : la fonction intervallique de Lewin (IFUNC) et le vecteur d'intervalles de Forte (VI). La fonction intervallique (*Intervallic FUNCtion*) de Lewin répertorie la multiplicité de chaque intervalle (de l'unisson jusqu'à l'intervalle de septième majeure), entre deux notes quelconques d'un accord. À la différence du vecteur de Forte, la fonction intervallique (qui précède historiquement la notion de vecteur d'intervalles) fait la différence entre l'intervalle de quarte et l'intervalle de quinte, deux intervalles étant en relation mutuelle d'inversion et qui sont donc identifiés dans le vecteur de Forte. De plus, la fonction IFUNC peut s'appliquer entre deux accords différents, ayant ou pas le même nombre de notes, comme le montre le patch *OpenMusic* en figure 22.

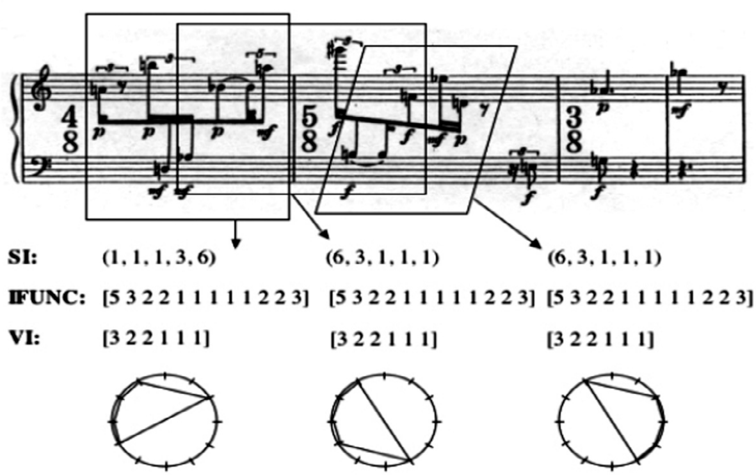


Figure 21 – Premières mesures du *Klavierstücke III* de Stockhausen avec un début de processus de segmentation par imbrication.

En faisant abstraction de l'organisation rythmique et métrique, on peut représenter les hauteurs en notation proportionnelle, en gardant ainsi l'ordre d'apparition de chaque événement musical. La figure suivante (figure 23) prolonge le début de segmentation précédente en explicitant les transformations entre les différents accords de cinq notes. La notation T_nI indique l'opération d'inversion I suivie par l'opération de transposition T_n de n demi-tons. Algébriquement, cette opération « composite » correspond à la transformation qui transforme une hauteur x dans la hauteur n-x. Elle est souvent abrégée par I_n, une notation que nous allons employer dans la partie consacrée aux réseaux de Klumpenhouwer. Par exemple, le premier pentacorde {2,8,9,10,11} est transformé par la transformation T_7I dans l'accord {7-2,7-8,7-9,7-10,7-11}, ce qui donne l'ensemble {5,11,10,9,8} après réduction des résultats modulo 12.

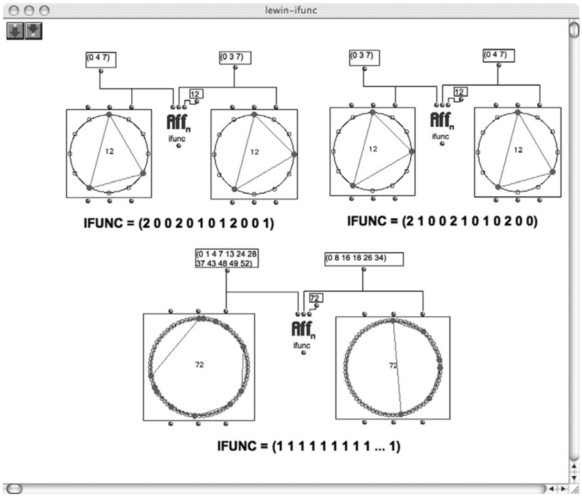


Figure 22 – Quelques exemples d'utilisation de la fonction intervallique. Notons la propriété de symétrie par rapport à l'échange des facteurs. Autrement dit, IFUNC(*A,B*) est égale à la lecture en rétrogradation (à une permutation cyclique près) de IFUNC(*B,A*) et vice versa. Le troisième exemple reprend le cas de la factorisation du groupe cyclique d'ordre 72 en somme directe de deux sous-ensembles non périodiques. Le fait que IFUNC soit constamment égale à 1 découle directement de l'expression de IFUNC(*A,B*) comme un produit de convolution des fonctions caractéristiques des deux ensembles[60].

60. D. Lewin, « Re: Intervalic Relations between two collections of notes », *Journal of Music Theory*, 3, 1959, p. 298-301. Emmanuel Amiot (E. Amiot, « Une preuve élégante du théorème de Babbitt par transformée de Fourier discrète », *Quadrature*, 61, juillet-septembre 2006) a récemment donné une démonstration du Théorème de l'Hexacorde (ou théorème de Babbitt) qui découle, elle aussi, directement de la définition de IFUNC en termes de produit de convolution. Ce théorème affirme qu'un hexacorde *A* et son complémentaire *A** ont le même vecteur d'intervalles ou bien, en utilisant la fonction intervallique, que IFUNC(*A,A*)=IFUNC(*A*,A**). Pour une analyse des aspects computationnels liés à ce théorème « mathémusical », voir également Chemillier (M. Chemillier, « Monoïde libre et musique », RAIRO *Inf. Theo.*, vol. 21, n° 3 et 4, 1987, p. 341-371 et p. 379-417 et M. Chemillier, *Structure et Méthode algébriques en informatique musicale*, Thèse, LITP, Institut Blaise Pascal, 1990).

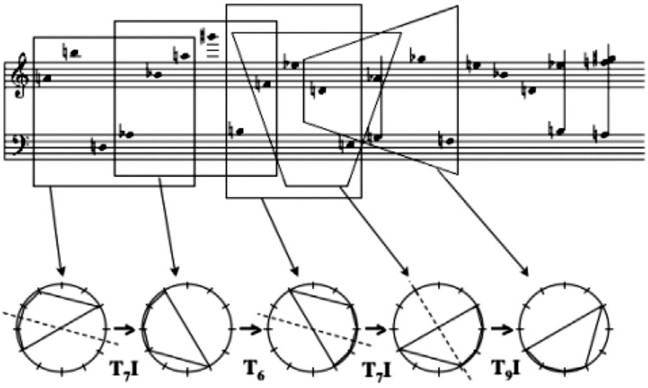


Figure 23 – Segmentation de la pièce par des transformations d'un même pentacorde.

La segmentation est obtenue en considérant les différentes transformations d'un pentacorde de base. Notons que ces transformations ne changent pas la « structure » du pentacorde, car les cinq formes sont « équivalentes » par rapport à une transposition ou une inversion (ou une combinaison des deux opérations). La segmentation suit le déroulement temporel de la pièce. On parlera donc de « progression transformationnelle ».

Une telle progression donne à chacune des transformations une position bien déterminée dans le déroulement temporel de la pièce. L'analyse reflète ainsi la progression chronologique du pentacorde au cours des premières mesures. À cause des imbrications entre les différentes formes des pentacordes, une telle structuration impose à chacune des transformations un poids qui semble être contredit par la perception musicale. Pour reprendre la formulation de Lewin : « *À cause précisément de la forte temporalité narrative, chaque transformation* [arrow] *doit porter un poids énorme pour affirmer une sorte de présence phénoménologique.* »[61]

61. D. Lewin, *Musical Form and Transformation : 4 Analytic Essays*, New Haven, Yale University Press, 1993, p. 23. La prise en compte d'une dimension phénoménologique dans l'analyse musicale mérite également d'être soulignée car elle montre la distance qui sépare la théorie transformationnelle d'une approche « structuraliste » au sens philosophique. Remarquons également

Une stratégie différente considère les transformations comme une structuration possible d'un espace abstrait des formes du pentacorde. C'est dans cet espace abstrait qu'on peut envisager d'analyser le déroulement de la pièce. On désignera un tel espace abstrait avec le terme de « réseau transformationnel ». Grâce à la transformation d'inversion qui fixe le tétracorde chromatique de chaque pentacorde, il est ainsi possible de créer des relations « formelles » entre diverses formes du pentacorde. L'ensemble de ces relations forme un espace de potentialités à l'intérieur duquel la pièce se déroule. À la différence de la « progression transformationnelle », l'organisation des formes du pentacorde dans un réseau n'a aucun lien direct avec leur apparition chronologique. Cette structuration abstraite est néanmoins suggérée et limitée par les transitions effectives dégagées dans la progression temporelle.

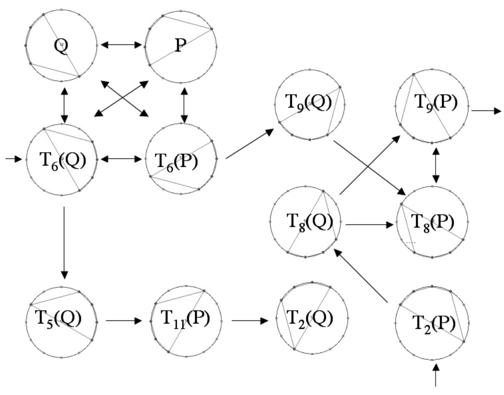


Figure 24 – Une partie du réseau transformationnel du *Klavierstück III* de Stockhausen[62].

que les concepts de base de la phénoménologie husserlienne sont abordés par Lewin dans un article qui adresse la question du lien entre théorie de la musique et perception (D. Lewin, « Music Theory, Phenomenology and Modes of Perception », *Music Perception*, 3(4), 1986, p. 327-392). Nous reviendrons dans la suite sur cet aspect « philosophique » de la formalisation théorique, car la question du rapport entre formalisation algébrique et phénoménologie représente, à notre avis, un des enjeux majeurs d'une lecture des thèses de David Lewin à travers des outils mathématiques plus abstraits, tels la théorie des catégories.

62. D'après D. Lewin, *op. cit.*, 1993.

La figure 24 ci-contre reprend une partie du réseau de la pièce proposé par Lewin en explicitant les structures de pentacorde ainsi que leurs transformations à l'aide de la représentation circulaire. On indiquera avec P le pentacorde générateur de la pièce et avec Q son inversion par rapport à l'axe de symétrie qui fixe le tetracorde chromatique.

Il est évident que l'analyse transformationnelle concerne non seulement la « construction » d'un réseau d'ensembles de classes de hauteurs mais également l'« utilisation » de cette architecture formelle pour l'analyse de la pièce dans sa « singularité ». Autrement dit, pour reprendre le titre de l'étude de Lewin consacrée au *Klavierstück III*[63], l'intérêt de *construire* un réseau transformationnel réside dans la possibilité de l'*utiliser*, à la fois pour « structurer » l'écoute par rapport à la singularité de l'œuvre analysée mais également pour établir des critères formels qui pourront servir à aborder son interprétation. D'un point de vue « conceptuel », l'analyse transformationnelle précédente pose le problème du nombre des configurations spatiales possibles pour une pièce musicale donnée. Cela pose le problème de la construction d'un tel réseau de façon automatique ou semi-automatique. Dans le cas de la pièce de Stockhausen, une tentative de réaliser une analyse transformationnelle assistée par ordinateur a été faite par Yun-Kang Ahn[64]. Cette question est liée, évidemment, au problème de la segmentation qui est choisie *ad hoc* par l'analyste afin de mettre en évidence la puissance génératrice de la structure de pentacorde. Plusieurs auteurs, dont Fred Lerdhal[65] et,

63. « Making and Using a Pcset Network for Stockhausen's *Klavierstück III* » (D. Lewin, *op. cit.*, 1993, p. 16-67).

64. Yun-Kang Ahn, *Aspects théoriques et informatiques de l'analyse transformationnelle*, mémoire de Master ATIAM, 2006. Voir aussi Y.-K. Ahn ; M. Andreatta ; C. Agon, « Preliminaries for Transformational Analysis in OpenMusic », *Proceedings of the International Joint Conference on Artificial Intellingence*, Hiderabad, India, 2007.

65. Fred Lerdhal, « Structure de prolongation dans l'atonalité », *La Musique et les Sciences cognitives* (S. McAdams et I. Deliège éd.), Bruxelles : Mardaga, 1989, p. 103-135.

plus récemment, Jean-Jacques Nattiez[66], ont souligné le caractère « ambigu » de la segmentation dans la *Set Theory*, qui n'offre pas à l'analyste des critères prescriptifs pour en établir la pertinence par rapport aux stratégies compositionnelles (dimension poïetique) ou aux retombées perceptives (niveau esthésique). Cependant, comme Lewin le montre, dans le cas de l'analyse transformationnelle, les critères de segmentation ne reposent en général pas sur une connaissance préalable des techniques compositionnelles utilisées par le compositeur ni sur des données perceptives issues de la psychologie expérimentale. En particulier, dans l'analyse du *Klavierstück III*, on aurait pu, probablement[67], utiliser une segmentation différente, fondée sur des structures de tétracordes au lieu de pentacordes, pourvu qu'on puisse établir un réseau des transformations de ces éléments de base susceptible de recouvrir intégralement la pièce.

Soulignons qu'il ne s'agit pas, cependant, d'établir une théorie de la perception de l'œuvre à partir de laquelle on puisse déduire des critères analytiques adéquats pour la segmentation et la mise en relation des segments choisis[68]. L'hypothèse sous-jacente, dont la validité ne peut être vérifiée que de façon expérimentale, est que la perception reste induite par la structure, pour renverser les termes d'une analyse récente du phénomène structuraliste en

66. Jean-Jacques Nattiez, « La *Set Theory* d'Allen Forte, le niveau neutre et la poïétique », *Autour de la Set Theory* (dir. M. Andreatta, J.-M. Bardez et J. Rahn), Collection « Musique/Sciences », Ircam/Delatour France, 2008.
67. Cependant, combien de ces segmentations permettent d'engendrer la pièce avec des transformations d'une même structure musicale de base ? Nous n'avons pas su répondre à cette question qui demande une étude systématique des différents processus de segmentation et de leurs propriétés en termes de complexité.
68. Nous avons touché cet aspect dans un article consacré à la nature communicative de la musique et dans lequel nous analysons, entres autres, la distance qui sépare les théories mathématiques de la musique des théories musicales basées sur une hypothèse cognitive, comme la théorie générative de la musique tonale de Lerdhal et Jackendoff. Voir E. Acotto et M. Andreatta, « Représentations mentales musicales et représentations mathématiques de la musique », à paraître dans *In Cognito, Cahiers Romans de Sciences Cognitives*.

musique faite par F. Lévy[69]. Cependant, la construction d'un réseau transformationnel est d'autant plus riche de conséquences qu'elle s'appuie sur une volonté précise de rendre « intelligible » une logique musicale sous-jacente. Dans le cas du *Klavierstück III*, par exemple, la logique musicale sous-jacente au processus analytique vise à faire émerger le réseau relationnel entre les différentes composantes de la pièce en s'appuyant sur la structure du tétracorde chromatique commune aux transformations des différents pentacordes.

Calcul catégoriel des réseaux de Klumpenhouwer en relation d'isographie forte

Les réseaux de Klumpenhouwer constituent, à présent, l'une des directions les plus actives dans l'approche analytique de type transformationnel. Introduits par David Lewin et Henry Klumpenhouwer au début des années 1990, ces réseaux représentent des outils formels qui, à la différence des approches « set théoriques » traditionnelles, sont susceptibles d'applications dans des répertoires stylistiques très divers, de la musique tonale à la musique atonale en passant par la musique sérielle, modale et jazz. D'après Lewin[70], un réseau de Klumpenhouwer est un réseau qui organise le matériau musical (notes, accords, gammes, séries, pattern rythmiques, …[71]) en configuration « diagramma-

69. F. Lévy, « Le tournant des années 70 : de la perception induite par la structure aux processus déduits de la perception », *Le Temps de l'écoute : Gérard Grisey ou la beauté des ombres sonores*, Paris : L'Harmattan/L'itinéraire, 2004.

70. D. Lewin, « Klumpenhouwer Networks and Some Isographies that Involve Them », *Music Theory Spectrum*, xii, 1990, p. 83-120.

71. Le compositeur Tolga Tüzun a récemment proposé d'appliquer les réseaux de Klumpenhouwer à la dimension du timbre. Les premiers résultats sont encourageants, bien que la difficulté majeure reste celle d'adapter des structures algébriques de groupe à des situations musicales dans lesquelles l'axiome de l'inverse n'est pas toujours vérifié, ce qui suggère d'affaiblir les conditions en proposant des définitions de la théorie transformationnelle basées sur la structure de monoïde. Voir T. Tüzun, « Timbral Configuration Spaces : an introduction to Timbral Transformational Networks », communication orale, Journée d'études en hommage à David Lewin, samedi 13 mai 2006, Conservatoire Hector Berlioz, Paris.

tique » avec des transformations de transposition et d'inversion entre les objets et avec une hypothèse implicite, à savoir que les diagrammes sont commutatifs. La figure ci-contre (figure 25) montre l'exemple du réseau de Klumpenhouwer utilisé par Xavier Hascher dans son analyse de la quatrième des *Historische Hungarische Bildnisse* de Franz Liszt[72]. Les réseaux **mg** et **b2** ont les mêmes configurations des flèches. Une telle relation est appelée isographie forte *(strong isography)*. Les deuxième et troisième réseaux, ainsi que le premier et le troisième, ont les mêmes configurations de flèches en ce qui concerne les transpositions, tandis que les facteurs d'inversions réciproques diffèrent tous d'une constante[73]. Le problème sur lequel nous avons travaillé concerne l'énumération des réseaux en relation d'isographie forte indépendamment du nombre des notes du réseau et du type de transformations en jeu[74].

Au-delà de l'outillage technique que nous avons utilisé pour formaliser un K-réseau de façon compatible avec l'architecture des dénotateurs décrite dans Mazzola[75], l'approche catégorielle nous a permis d'aboutir au calcul du nombre des réseaux qui sont entre eux en relation d'isographie forte. En effet, les réseaux de Klumpenhouwer peuvent être formalisés comme des cas particuliers de limites de diagrammes catégoriels, ce qui permet d'appliquer un résultat général concernant la « taille » des limites d'un diagramme. Une limite (non vide) d'un diagramme catégoriel du type utilisé dans la théorie transformationnelle est toujours isomorphe à un sous-groupe de $(\mathbf{Z/12Z})^q$ où q est le nombre d'objets du diagramme. Ceci explique donc pourquoi le nombre de *K-nets* en relation d'isographie forte est toujours un diviseur de 12. La

72. F. Hascher, « Liszt et les sources de la notion d'agrégat », *Analyse Musicale*, 43, 2002.

73. Autrement dit, chaque flèche d'inversion I_d du premier ou du deuxième réseau est transformée dans l'inversion I_{d+k} avec k=9.

74. Il n'y a aucune raison, en effet, de se limiter au cas des transpositions et des inversions. Nous avons donc élargi l'ensemble des flèches à toute transformation bijective, en incluant ainsi les applications affines, les permutations, les rétrogradations (dans le cas des séries dodécaphoniques, etc.).

75. G. Mazzola, *op. cit.*, 2004.

figure 26 montre l'ensemble des solutions du problème suivant : trouver les réseaux de Klumpenhouwer en relation d'isographie forte avec un réseau initial généralisé, i.e. contenant également des transformations affines (telle la multiplication par 7).

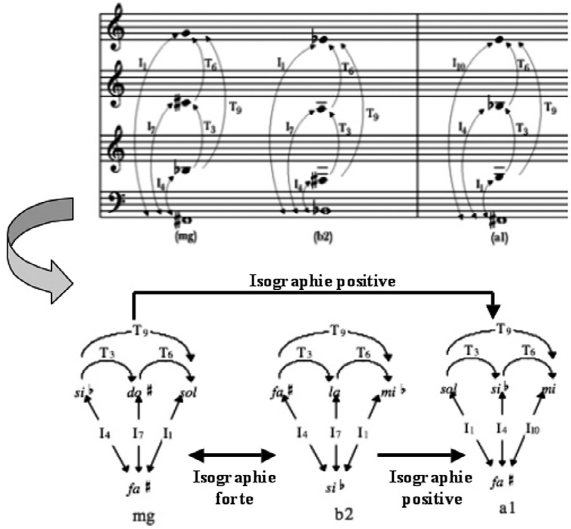


Figure 25 – Trois *K-réseaux* en différentes relations isographiques (d'après Hascher, 2002).

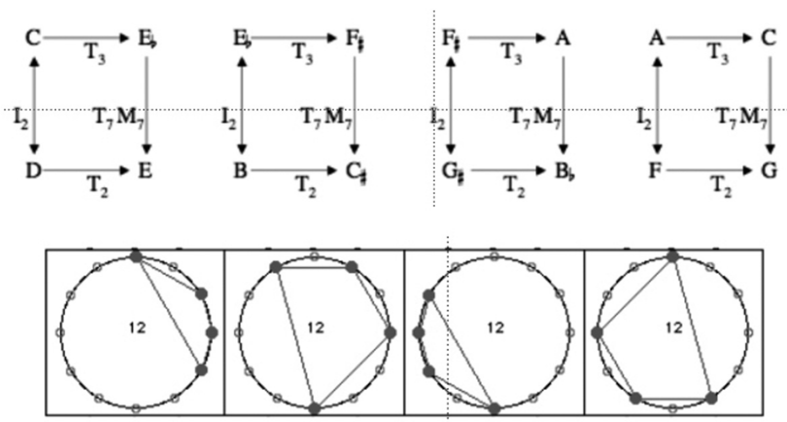


Figure 26 – Un exemple dans lequel il n'y a que quatre *K-réseaux* qui sont mutuellement en relation d'isographie forte.

Quelques ramifications philosophiques de l'approche algébrique en musique

Dans une perspective plus philosophique, l'approche algébrique en sciences humaines renvoie au premier abord à un paradigme structuraliste dont on connaît désormais assez bien les aspects les plus problématiques[76]. Cependant, si l'on analyse la portée conceptuelle d'une approche algébrique en musique, force est de constater que les ramifications philosophiques des méthodes algébriques ouvrent des questions qui dépassent largement le cadre structural. La musique représente, à nos yeux, un objet d'étude grâce auquel on pourrait arriver à concilier certaines instances structuralistes avec d'autres orientations philosophiques, en particulier la phénoménologie husserlienne.

C'est une hypothèse que l'on peut avancer à partir, par exemple, des écrits d'Ernst Cassirer, dont certaines considérations algébriques sur la mélodie musicale semblent bien s'inscrire dans une démarche qui reste ancrée sur le terrain de la phénoménologie[77]. En outre, l'articulation entre l'objectal et l'opératoire, que l'épistémologue français Gilles-Gaston Granger avait indiqué à partir de la fin des années 1940 comme le fondement de la notion du concept philosophique[78], semble toucher un aspect qui, comme nous l'avons déjà mentionné, peut être considéré comme la dualité à la base de la théorie musicale : l'articulation entre le son et l'intervalle.

Cette considération ouvre également à des questions qui touchent plus précisément les rapports entre méthodes algébriques, perception et cognition musicale auxquels nos travaux n'ont pas su donner, jusqu'à maintenant, une réponse satisfaisante. Un

76. J. Petitot, *Morphogenèse du sens*, Paris : PUF, 1985.
77. Cassirer, « The concept of group and the theory of perception », *Philosophy and Phenomenological Research*, V/1, 1944, p. 1-36.
78. G.-G. Granger, *Formes, Opérations, Objets*, Paris : Librairie Philosophique J. Vrin, 1994.

aspect de ces retombées concerne le processus de construction d'un réseau transformationnel. Nous voudrions proposer une lecture des diagrammes utilisés par Lewin à partir d'une analyse de certaines approches développementales récentes de la pensée logico-mathématique. Parmi les trois problématiques qui, selon le psychologue Olivier Houdé, marquent le renouveau de la pensée piagétienne, la théorie mathématique des catégories occupe une place tout à fait centrale. À la différence de l'approche structurale que Piaget a développée à partir de l'*Essai de logistique opératoire*[79] et qui constitue également le cadre conceptuel de ses recherches sur l'abstraction réfléchissante[80] et sur la généralisation[81], la théorie des catégories introduit, selon Houdé, un élément nouveau dans la pensée opératoire[82].

Les morphismes permettent « la prise en compte d'un aspect de la cognition logico-mathématique qui ne procède pas de la transformation du réel (opérations et groupements d'opérations) mais de la simple activité de mise en relation »[83]. Cette lecture de l'approche catégorique éclaircit, à notre avis, un aspect fondamental de l'analyse musicale de type transformationnel, à savoir l'articulation entre la notion de progression et celle de réseau transformationnel. Dans une progression, les transformations s'enchaînent selon un ordre qui respecte le déroulement chronologique de la pièce. La logique opératoire reste ancrée dans une notion de temporalité qui, comme dans le cas du *Klavierstück III*,

79. J. Piaget, *Essai de logistique opératoire*, Paris : Armand Colin, 1949.
80. J. Piaget, « Recherches sur l'abstraction réfléchissante », *Études d'épistémologie génétique*, Paris : Presses Universitaires de France, 1977, p. 34-35.
81. J. Piaget, « Recherches sur la généralisation », *Études d'épistémologie génétique*, Paris : Presses Universitaires de France, 1978, p. 36.
82. Notons que l'approche algébrique est déjà présente chez Piaget dès la fin des années trente, comme le témoigne l'écrit intitulé « La réversibilité des opérations et l'importance de la notion de "groupe" pour la psychologie de la pensée » (communication de Jean Piaget dans le cadre du Onzième congrès international de psychologie, Paris, 25-31 juillet 1937 : rapports et comptes rendus (dir. H. Piéron et I. Meyerson, Agen : Impr. Moderne, p. 433-435, 1938).
83. O. Houdé et D. Miéville, *Pensée Logico-mathématique, nouveaux objets interdisciplinaires*, Paris : Presses Universitaires de France, 1994, p. 116.

s'avère parfois insuffisante d'un point de vue de la perception de l'œuvre.

Dans un réseau transformationnel, la « logique opératoire » est créée par le sujet (qui est dans ce cas l'auditeur et/ou l'analyste) à travers une mise en relation d'objets et de morphismes dans un espace abstrait de potentialités. Pour paraphraser la conclusion de Lewin, dans le cas des progressions transformationnelles, quand nous sommes à un point d'une telle progression, nous sommes à un *instant* précis du temps, de la *narration* de la pièce, tandis que dans le cas d'un réseau abstrait nous sommes plutôt à un *point* bien défini à l'intérieur d'un *espace* créé par la pièce. Dans un réseau spatial, les différents événements musicaux « se déroulent à l'intérieur d'un univers bien défini de relations possibles tout en rendant l'espace abstrait de cet univers accessible à nos sensibilités. Autrement dit, l'histoire projette ce qu'on appelle traditionnellement la forme »[84].

Il est probablement trop tôt pour évaluer les conséquences épistémologiques d'un tel changement de paradigme en analyse musicale, la théorie transformationnelle n'étant pas encore un objet d'études pour la psychologie expérimentale. Cependant, elle ne fait qu'articuler, à un deuxième degré, la dualité de l'*objectal* et de l'*opératoire* en tant que « *catégorie primitive de la pensée* », pour reprendre la thèse de Granger[85]. Du point de vue des sciences cognitives, cette approche touche à la question même de la nature de l'espace en musique, un problème dont la richesse en ce qui concerne les possibles retombées perceptives et cognitives reste, à notre avis, à comprendre. Cependant, ces types de problématiques demandent également une remise en question des ramifications philosophiques de certaines théories algébriques, en particulier la théorie des catégories et des topoï, appliquées à la musique.

84. D. Lewin, *op. cit.*, 1993, p. 41.

85. Voir, en particulier, l'écrit « Contenus formels et dualité », repris dans Granger (G.-G. Granger, *op. cit.*, 1994).

À partir de réflexions des mathématiciens sur la portée phénoménologique de l'activité mathématique contemporaine[86], et en comparant ces auteurs avec d'autres orientations plus épistémologiques sur la portée cognitive de la réflexion phénoménologique[87], les chercheurs en théorie mathématiques de la musique, musicologie computationnelle et informatique musicale pourraient ainsi arriver à constituer un cadre conceptuel nouveau à l'intérieur duquel certains problèmes mathématiques posés par la musique ont des implications importantes pour la perception et soulèvent des questions théoriques et philosophiques auxquelles la philosophie toute seule n'aurait, peut-être, jamais pensé.

Remerciements

Je remercie Laurent Pottier pour m'avoir invité à participer au Colloque « Le calcul de la musique » (Université Jean Monnet, Saint-Étienne, 2 mars 2007) et avoir sollicité cette contribution. Cette étude reprenant des résultats contenus dans mon travail de thèse, je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé à mener à bien mes recherches. En particulier, je remercie Gérard Assayag, responsable de l'Équipe Représentations Musicales pour ses soutiens et encouragements constants et Carlos Agon pour l'amitié, la disponibilité et la générosité dont il a fait preuve à tout moment. Merci enfin à Georges Bloch pour sa lecture attentive de l'article.

86. F. Patras, « Phénoménologie et théorie des catégories », dans L. Boi (dir.) : *Geometries of Nature, Living Systems and Human Cognition : New Interactions of Mathematics with Natural Sciences and Humanities*, World Scientific Publishing, 2006.
87. J. Petitot, F. J. Varela, B. Pachoud et J.-M. Roy, *Naturaliser la phénoménologie. Essais sur la phénoménologie contemporaine et les sciences cognitives*, Paris : CNRS Éditions, 2002.