

# Rapport de Stage

Matthieu Aussal

2 juillet 2009

## Intitulé su stage :

Utilisation de la méthode des éléments finis de frontière ou méthodes intégrales (en anglais B.E.M., Boundary Element Method) en synthèse sonore (logiciel Modalys, développé par l'Ircam). Application au calcul des fréquences propres et du rayonnement acoustique de structures complexes (instruments de musique).

## Résumé

La BEM est une puissante technique de calcul applicable à de nombreux problèmes d'ingénierie. Pour un utilisateur, la principale caractéristique de cette méthode est qu'elle ne nécessite que le maillage de la frontière  $\Gamma$  d'un domaine  $\Omega$ . De plus, cette méthode permet de calculer le rayonnement en tout point de l'espace à partir du maillage de la frontière. Nous allons dans ce rapport appliquer cette technique aux problèmes d'acoustique linéaire en cherchant à calculer les fréquences propres et le rayonnement d'un instrument à vent, modélisé par une colonne d'air. En première approche, nous allons nous intéresser aux problèmes plans car ceux-ci sont plus simples à résoudre. Cette approche est valide car l'équation des ondes, traduisant la physique de notre problème, modélise aussi les vibrations d'une membrane idéale (sans raideur).

Dans la suite, nous distinguerons deux classes de problèmes, les problèmes extérieurs et les problèmes intérieurs. La BEM est particulièrement efficace pour les problèmes extérieurs car celle-ci présente l'avantage de prendre exactement en compte les effets de rayonnement à l'infini, comme par exemple pour le rayonnement d'un saxophone dans l'air. Dans ce cadre, appliquer une Méthode d'Éléments Finis (F.E.M.) nous obligerait à borner le domaine, donc à faire des approximations.

Pour appliquer la BEM, l'équation aux dérivées partielles traduisant la physique du problème sur  $\Omega$  appliqué au champ  $\varphi$  inconnu doit être reformulée comme une équation intégrale sur la frontière  $\Gamma$  uniquement. En discrétisant la frontière par éléments finis, puis en interpolant le champ  $\varphi$  sur chacun de ces éléments comme pour une méthode classique de FEM, on obtient un système linéaire d'équation que l'on peut résoudre numériquement. On utilise une autre équation appelée représentation intégrale pour reconstruire le champ  $\varphi$  sur le domaine  $\Omega$ . Celle-ci ne nécessite pas de maillage puisque le champ  $\varphi$  sur le domaine  $\Omega$  est calculé directement à partir du champ  $\varphi$  sur la frontière  $\Gamma$ .

On pourra se référer au livre de Michel Bruneau (ref. [Br]) pour l'établissement de l'Equation d'Helmholtz et de quelques solutions analytiques. Le livre de Marc Bonnet (ref. [Bo]) donne lui en détail la théorie associée aux équations intégrales. Pour la vérification des résultats, le Handbook

(ref. [Ha]) donne les valeurs numérique des solutions analytiques. Enfin on pourra se documenter sur le site internet de Stephen Kirkup (ref. [Ki]) pour la mise en oeuvre pratique de la méthode des éléments de frontière (BEM). En effet, Celui-ci propose un code source en libre accès qui résoud l'équation de Laplace sur un carré, nous nous en sommes inspiré pour construire les différents programmes.

Dans une première partie, nous allons nous intéresser à l'aspect modélisation et aux formulations intégrales. Puis dans une seconde partie nous allons donner les principes généraux de la BEM. Dans une troisième partie, nous allons résoudre un problème aux valeurs propres dans le plan avant de le généraliser à l'espace tri-dimensionnel.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Etat de l'art</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Equations de l'acoustique linéaire</b>	<b>5</b>
1.1	Domaine Temporel, équation des ondes . . . . .	5
1.2	Domaine Fréquentiel, équation de Helmholtz . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Eléments de frontières</b>	<b>6</b>
2.1	Fondements de la méthode des éléments de frontières . . . . .	6
2.1.1	Représentation intégrale . . . . .	7
2.1.2	Equation intégrale . . . . .	8
2.2	Discrétisation des équations . . . . .	9
2.2.1	Création du maillage . . . . .	9
2.2.2	Equation intégrale discrète . . . . .	9
2.2.3	Opérateurs de résolution, quadrature de Gauss . . . . .	10
2.2.4	Equation intégrale matricielle . . . . .	10
2.2.5	Représentation intégrale matricielle . . . . .	11
2.3	Singularité et méthode de régularisation . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Equation intégrale hybride - The Schenck Method</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Résolution de l'équation de surface hybride</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Résolution de l'équation aux valeurs propres</b>	<b>13</b>
<b>II</b>	<b>Resultats</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>Problème interieur plan</b>	<b>15</b>
6.1	Calcul des Valeurs propres . . . . .	17
6.2	Visualisation des modes propres . . . . .	18
<b>7</b>	<b>Problème intérieur spatial</b>	<b>20</b>
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>20</b>
<b>A</b>	<b>Fonctions de Green et ses dérivées</b>	<b>23</b>
<b>B</b>	<b>Solutions analytiques</b>	<b>24</b>
B.1	Solution analytique du cube . . . . .	24
B.2	Solution analytique de la sphere . . . . .	25
B.3	Autres solutions analytiques . . . . .	26
<b>C</b>	<b>Intégration singulière pour un problème à deux dimension</b>	<b>27</b>
<b>D</b>	<b>Algorithmme en 2 dimensions</b>	<b>27</b>
D.1	interiortest.m . . . . .	27
D.2	rectang.m . . . . .	30
D.3	circle.m . . . . .	31
D.4	isobarycentre.m . . . . .	31

D.5	pasmax mesh.m . . . . .	31
D.6	eigenvalue.m . . . . .	32
D.7	coeff tchebychev.m . . . . .	33
D.8	Dirichlet.m . . . . .	35
D.9	resolution Rint.m . . . . .	37

## Table des figures

1	Passage à la limite sur la surface pour obtenir l'équation intégrale, avec sur la figure $\epsilon \equiv r$ . . . . .	8
2	Problème intérieur . . . . .	15
3	Mode propre du carré $[0, 1]^2$ calculés numériquement, Les lignes nodales (ou le champ intérieur est nul) sont en violet . . . . .	19
4	Mode propre du disque de rayon 1 calculés numériquement, Les lignes nodales (ou le champ intérieur est nul) sont en violet . . . . .	19
5	Protocole de vérification appliqué au cube $[0, 1]^3$ . Erreur relative sur les points du domaine $(0.5, 0.5, z)$ avec les nombres quantiques $k_x = k_y = k_z = 1$ pour un cube de coté 1. . . . .	20
6	Protocole de vérification appliqué au cube $[0, 1]^3$ . Sur les figures de gauche, les valeurs numériques dans le domaine aux points $(0.5, 0.5, z)$ (rond bleu) sont comparées aux valeurs théorique (trait rouge), pour les nombres quantiques $k_x = k_y = 1$ et $k_z$ qui vaut respectivement 1 2 et 3. Les figures de droite donnent elles le champ $\varphi$ sur la frontière, théoriquement nul. . . . .	21
7	Protocole de vérification appliqué à la shère de rayon unité. Sur les figures de gauche, les valeurs numériques dans le domaine aux points $(0, 0, z)$ (rond bleu) sont comparées aux valeurs théorique (trait rouge), pour les nombres quantique m qui valent respectivement 1 2 et 3. Les figures de droite donnent elles le champ $\varphi$ sur la frontière, théoriquement nul. . . . .	21

# Première partie

## Etat de l'art

### 1 Equations de l'acoustique linéaire

L'équation différentielle traduisant la physique du problème est rapidement établie dans cette partie en suivant la démarche de Michel Bruneau[Br]. Cette étude se place dans le cadre de l'acoustique linéaire. En formulation temporelle, la propagation acoustique dans un fluide (ici l'air) se modélise par l'équation des ondes (4). En régime fréquentiel, l'équation des ondes, reformulée en terme de potentiel, prend la forme de l'équation d'Helmholtz (6). C'est cette formalisation fréquentielle qui est adaptée à la recherche de fréquences propres du système.

#### 1.1 Domaine Temporel, équation des ondes

L'équation des ondes est obtenue à partir de trois équations issues des principes physiques : loi des gaz parfait, principe fondamental de la dynamique (équation d'Euler) et principe de conservation de la masse.

Dans le cas d'un gaz parfait, l'équation d'état d'un fluide adiabatique est la suivante :

$$p = c^2 \rho', \quad (1)$$

où  $p$  est la pression acoustique (différence entre la pression absolue  $P$  et la pression atmosphérique  $P_O$ ). La grandeur  $\rho'$  représente les petites variations autour de la masse volumique du fluide au repos ( $\rho = \rho_0 + \rho'$ ). La célérité des ondes dans le fluide est notée  $c$ .

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à un élément de volume fluide, de vitesse  $\mathbf{v}$ , soumis à des forces massique  $\mathbf{F}$  aboutit à l'équation d'Euler

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{grad}(p) + \rho \mathbf{F}. \quad (2)$$

Le principe de conservation de la masse d'un milieu pouvant contenir des sources,  $s$ , de débit (qui apporte du fluide ou retire du fluide) s'écrit quant à lui

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathit{div}(\rho \mathbf{v}) = \rho s. \quad (3)$$

Le report de l'équation d'état (1) dans la différence  $\mathit{div}(2) - \partial_t(3)$  donne l'équation des ondes<sup>1</sup> formulée en pression pour un fluide parfait, adiabatique, homogène ( $\rho = \rho(t)$ ) et isotrope :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho_0 \left[ \mathit{div}(\mathbf{F}) - \frac{\partial s}{\partial t} \right]. \quad (4)$$

**Equation de propagation des ondes sur une membrane** Dans le repère carthésien  $(O, x, y, z)$  de l'espace tridimensionnel, le déplacement transverse  $u(x, y)$

<sup>1</sup>En admettant que l'on puisse négliger les termes  $\rho' s$  et  $\rho' \mathbf{F}$

selon l'axe Oz d'une membrane située dans le plan Oxy, vérifie l'équation des ondes dans le plan (ref. [Fl]) :

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

ou  $\Delta$  est le laplacien en 2 dimensions et  $c$  la célérité des ondes.

## 1.2 Domaine Fréquentiel, équation de Helmholtz

En régime harmonique, la transformée de Fourier de l'équation des ondes (4) exprimée en potentiel des vitesse s'écrit<sup>2</sup> :

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = -q, \quad (6)$$

avec  $k = \frac{\omega}{c}$  le nombre d'onde,  $\omega$  la pulsation,  $q$  un terme global de source et  $\varphi$  défini par  $p = j\omega\rho\varphi$  (pour revenir à la grandeur physique  $p$ , il suffira de multiplier le résultat par  $j\omega\rho$ ). Cette dernière équation est appelée équation de Helmholtz.

Pour un problème bien posé, les conditions aux limites du champ solution sur la frontière  $\Gamma$  sont du type :

Dirichlet :  $p = \bar{p}_d$  sur  $\Gamma_D$

Neumann :  $\frac{\partial p}{\partial n} = \bar{p}_n$  sur  $\Gamma_N$

Robin :  $\alpha p + \beta \frac{\partial p}{\partial n} = \bar{p}_r$  sur  $\Gamma_R$

où  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R$ .

L'équation de Helmholtz (6) est adaptée à notre problème car en l'absence de source ( $q=0$ ), elle donne l'équation aux valeurs propres suivante que nous cherchons à résoudre :

$$\Delta \phi + k^2 \phi = 0 \quad (7)$$

Ces deux équations n'admettent pas de solutions analytiques triviales pour un domaine quelconque. Donc les méthodes numériques forment une alternative adaptée à la résolution.

## 2 Eléments de frontières

### 2.1 Fondements de la méthode des éléments de frontières

La méthode des éléments finis de frontière se fonde sur une représentation intégrale du champ solution de l'équation à résoudre sur le domaine  $\Omega$ . Celle-ci est construite comme une somme pondérée de solutions élémentaires sur la frontière  $\Gamma$ .

<sup>2</sup>Avec le terme de droite  $-(s + \frac{j}{\omega} \text{div}(\mathbf{F}))$  noté  $q$ , d'après Nicolas Joly (ref. [Jo])

### 2.1.1 Représentation intégrale

Cette représentation est obtenue à partir de la 3ème formule de green :

$$\int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \varphi_2 - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \varphi_1 \right) dS = \int_{\Omega} (\varphi_2 \Delta \varphi_1 - \varphi_1 \Delta \varphi_2) dV. \quad (8)$$

L'idée est d'utiliser cette formule avec deux champs,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , vérifiant l'équation à résoudre (ici Helmholtz (6)). Le premier est le champ inconnu  $\varphi$  et le second est une champ élémentaire  $G$  créé par une source ponctuelle située en un point  $\mathbf{x}$  de l'espace, de débit unité. Ce champ  $G$  étant solution de l'équation de Helmholtz (6), il vérifie

$$\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + k^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (9)$$

Comme le terme source de l'équation (9) est un dirac, la différence des produits  $G$  par (6) et de  $\varphi$  par (9) intégrée sur  $\Omega$  donne à l'aide de la 3ème formule de green (8) la représentation intégrale suivante (ref. [Bo]) :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma} [G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \varphi}{\partial n_y}(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial n_y}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dS_y \\ &+ \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q(\mathbf{y}) dV_y \end{aligned} \quad (10)$$

valable pour tout point  $\mathbf{x}$  dans le domaine ouvert  $\Omega$  privé de sa frontière  $\Gamma$ . Les fonctions  $G$  sont appelées fonctions de Green. De même, la représentation intégrale de la dérivée normale du champ  $\varphi$  notée  $\partial_{n_x} \varphi$ , correspondant à la vitesse acoustique  $\mathbf{v}$ , s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_{n_x} \varphi(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma} [\partial_{n_y} \varphi(\mathbf{y}) \partial_{n_x} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{y}) \partial_{n_x n_y}^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dS_y \\ &+ \int_{\Omega} \partial_{n_x} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q(\mathbf{y}) dV_y \end{aligned} \quad (11)$$

Il existe autant de représentation intégrale que de choix de fonctions de Green. La méthode des éléments finis de frontière utilise la fonction de green de l'espace infini, vérifiant les conditions de rayonnement à l'infini que Arnold Sommerfeld a défini en 1912 comme suit : "Les sources doivent être des sources, pas des puits d'énergie. L'énergie rayonnée des sources doit se disperser à l'infini ; aucune énergie ne peut être rayonnée de l'infini vers le domaine étudié.". Mathématiquement, cela se traduit par (ref. [So]) :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{m-1}{2}} \left( \frac{\partial}{\partial r} + ik \right) \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad (12)$$

avec  $r = |\mathbf{x}|$ ,  $m$  la dimension du domaine et  $k$  le nombre d'onde.

Ainsi, les conditions de radiations à l'infini seront exactement prises en compte dans la représentation intégrale de l'équation d'Helmholtz (9) et la connaissance de  $\varphi$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial n_x}$  en tout point  $\mathbf{y}$  de la frontière permettra de reconstruire le champ  $\varphi$  dans  $\Omega$ , donc le champ pression acoustique  $p$ .

**Remarque** En dimension 3, cette solution vaut (ref. [Te]) :

$$G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{jk|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \text{ avec } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^3 \quad (13)$$

En dimension 2, cette solution vaut (ref. [Bo]) :

$$G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) \quad (14)$$

avec  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  pour  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^2$ ,  $H_0^{(1)}$  la fonction de Hankel cylindrique d'ordre 0 de 1ère espèce. La dérivée normale de cette fonction correspond au champ rayonné dans l'espace par un dipole acoustique.

### 2.1.2 Equation intégrale

Utiliser la représentation intégrale (10) nécessite de connaître  $\varphi$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial n_x}$  sur la frontière  $\Gamma$ . Avec les conditions aux limites, seulement une partie des informations nécessaires est disponible. La partie manquante est obtenue en utilisant la représentation intégrale (10) (ou sa dérivée normale) pour un point  $\mathbf{x}$  appartenant à la frontière  $\Gamma$ . Ceci fournit une équation intégrale dont la résolution est le fondement de la méthode des éléments de frontière. Or la représentation intégrale (10) n'est pas valable sur la frontière. L'établissement de l'équation intégrale nécessite un passage à la limite décrit dans de nombreux ouvrages dont celui de Marc Bonnet (ref. [Bo]). Ce passage à la limite s'opère comme suit :

1. Exclure un point  $\mathbf{x} \in \Gamma$  de  $\Gamma$  et son voisinage  $s$  (cf fig. 1)
2. Appliquer l'équation (10) sur  $\mathbf{x}$  désormais dans  $\Omega$
3. Partitionner la surface  $\Gamma = (\Gamma - S) + s$
4. Calculer l'élément de surface sur  $s$  qui vaut ici  $2\pi\epsilon^2$  (demi-sphère dans le cas  $\mathbf{x}$  régulier)
5. Faire tendre  $\epsilon$  vers 0

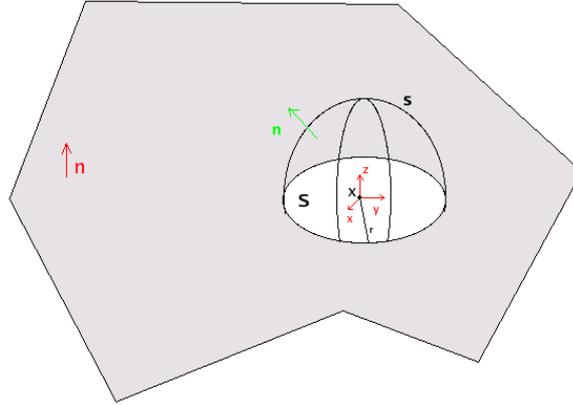


FIG. 1 – Passage à la limite sur la surface pour obtenir l'équation intégrale, avec sur la figure  $\epsilon \equiv r$

Alors  $(\Gamma - S) \rightarrow \Gamma$  et l'intégrale sur  $s$  de  $G$  donnera une contribution nulle et celle de  $\frac{\partial G}{\partial n}$  donnera  $\kappa \frac{1}{2}$  avec  $\kappa = \pm 1$  selon l'orientation de  $n$ . Ceci aboutit à

l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \kappa \frac{1}{2} \varphi(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma} [G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \varphi}{\partial n_y}(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial n_y}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dS_y \\ &+ \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q(\mathbf{y}) dV_y \end{aligned} \quad (15)$$

On obtiendra de même l'équation intégrale du champ dérivé  $\partial_{n_x} \varphi$ , correspondant à la vitesse acoustique  $\mathbf{v}$ .

$$\begin{aligned} \kappa \frac{1}{2} \partial_{n_x} \varphi(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma} [\partial_{n_y} \varphi(\mathbf{y}) \partial_{n_x} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{y}) \partial_{n_x n_y}^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dS_y \\ &+ \int_{\Omega} q(\mathbf{y}) \partial_{n_x} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_y \end{aligned} \quad (16)$$

Remarques :

- $\kappa$  est positif pour un problème intérieur et négatif pour un problème extérieur.
- La limite  $\kappa \frac{1}{2}$  est valable uniquement pour une surface régulière. Dans le cas contraire, il faut considérer l'angle solide formé par l'intersection de la sphère centrée en  $\mathbf{x}$  et du domaine comme élément de surface

## 2.2 Discrétisation des équations

Le problème acoustique ayant été traduit en équations intégrales continues, la résolution numériquement nécessite la discrétisation du problème. Dans toute cette partie, il n'y aura pas de terme source ( $q=0$ ).

### 2.2.1 Création du maillage

La frontière  $\Gamma$  est approchée comme dans une méthode classique d'éléments finis par un maillage composé de  $N_S$  noeuds géométriques formant  $N_E$  éléments  $E_e$  tels que

$$\Gamma \simeq \tilde{\Gamma} = \bigcup_{e=1}^{N_E} E_e \quad (17)$$

Les données du maillage seront consignées sous forme de table :

**Table de Coordonnée :** Donne pour tout noeuds géométrique du maillage ses coordonnées carthésiennes. Taille  $N_S \times n$

**Table de Connectivité :** Définie les  $N_E$  éléments  $E_e$  par la donnée des  $N_e$  noeuds locaux les composants. Taille  $N_E \times N_e$

**Table de Normale :** Donne pour chaque élément plan les coordonnées carthésiennes de sa normale unitaire extérieure. Taille  $N_E \times n$

### 2.2.2 Equation intégrale discrète

La méthode de collocation par point a été employée pour le calcul des champs inconnus  $\varphi$  et  $\partial_n \varphi \equiv \mathbf{v}$  sur la frontière. Elle consiste à évaluer les équations intégrales (15) et (16) en des points appelés points de collocation et notés  $\mathbf{x}_c$

préalablement définis pour chaque élément (ici l'isobarycentre de l'élément). De plus les champs inconnus  $\varphi$  et  $\mathbf{v}$  sont considérés comme constants sur chaque élément de la frontière approchée. Ainsi l'équation intégrale (15), en l'absence de source de volume  $q$ , peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire ayant pour inconnu les champs  $\varphi$  et  $\mathbf{v}$

$$\kappa \frac{1}{2} \varphi(\mathbf{x}_c) = \sum_{e=1}^{N_E} \mathbf{v}_e \int_{E_e} G(\mathbf{x}_c, \mathbf{y}) dS_y - \sum_{e=1}^{N_E} \varphi_e \int_{E_e} \frac{\partial G}{\partial n_y}(\mathbf{x}_c, \mathbf{y}) dS_y \quad (18)$$

avec  $\varphi_e$  qui correspond au champ  $\varphi$  calculé au point de collocation  $\mathbf{x}_c$  de l'élément  $E_e$  et  $\mathbf{v}_e$  qui correspond au champ  $\mathbf{v}$  calculé au point de collocation  $\mathbf{x}_c$  de l'élément  $E_e$ . De même pour l'équation intégrale de la vitesse acoustique  $\mathbf{v}$  (16).

$$\kappa \frac{1}{2} \mathbf{v}(\mathbf{x}_c) = \sum_{e=1}^{N_E} \mathbf{v}_e \int_{E_e} \partial_{n_x} G(\mathbf{x}_c, \mathbf{y}) dS_y - \sum_{e=1}^{N_E} \varphi_e \int_{E_e} \partial_{n_x n_y}^2 G(\mathbf{x}_c, \mathbf{y}) dS_y \quad (19)$$

### 2.2.3 Opérateurs de résolution, quadrature de Gauss

Les système linéaires précédents font intervenir des intégrales élémentaire qui peuvent être mises sous forme d'opérateurs afin de simplifier les écritures. En effet, pour un point  $\mathbf{x}$  fixé sur un élément  $E_e$ , on peut écrire

$$[L_k]_{E_e}(\mathbf{x}) = \int_{E_e} G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y \quad (20)$$

$$[M_k]_{E_e}(\mathbf{x}) = \int_{E_e} \frac{\partial G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} dS_y \quad (21)$$

$$[M_k^t]_{E_e}(\mathbf{x}, \mathbf{n}_x) = \frac{\partial}{\partial n_x} \int_{E_e} G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y \quad (22)$$

$$[N_k]_{E_e}(\mathbf{x}, \mathbf{n}_x) = \frac{\partial}{\partial n_x} \int_{E_e} \frac{\partial G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} dS_y \quad (23)$$

avec  $\mathbf{n}_x$  et  $\mathbf{n}_y$  les vecteurs normaux respectivement aux points  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  et  $G_k$  la fonction de green définie précédemment (14 ou 13 selon les cas).

Pour évaluer ces opérateurs, une méthode de quadrature par point de Gauss a été utilisée. Pour un point de collocation  $\mathbf{x}_c$  fixé, les intégrales élémentaires sont approximées numériquement par une somme pondéré et discrète utilisant les valeurs de l'intégrande en  $n_g$  de point de gauss  $\mathbf{y}_g$  appartenant à l'élément  $E_e$ .

### 2.2.4 Equation intégrale matricielle

En notant  $[L_k]_{i,j}$  l'opérateur élémentaire  $[L_k]_{E_i}(\mathbf{x}_c)$  où le point de collocation  $\mathbf{x}_c$  appartient à l'élément  $E_j$ , on forme la matrice  $[L_k]_{\Gamma}$ . En faisant de même pour les autres opérateurs, on forme les matrices  $[M_k]_{\Gamma}$ ,  $[M_k^t]_{\Gamma}$  et  $[N_k]_{\Gamma}$ . Alors, les systèmes linéaires des équations intégrales discrètes (19) et (18) peuvent être s'écrire sous forme d'équation matricielle :

$$\kappa \frac{1}{2} \varphi I_d = [L_k]_{\Gamma} \mathbf{v} - [M_k]_{\Gamma} \varphi \quad (24)$$

$$\kappa \frac{1}{2} \mathbf{v} I_d = [M_k^t]_{\Gamma} \mathbf{v} - [N_k]_{\Gamma} \varphi \quad (25)$$

Il y a autant de points de collocation que d'éléments donc les matrices précédentes sont carrés. Il reste à résoudre ce système linéaire, ce qui est fait dans la prochaine section (4).

### 2.2.5 Représentation intégrale matricielle

Pour un point  $\mathbf{x}$  à l'intérieur du domaine  $\Omega$ , la représentation intégrale (10) peut s'écrire, elle aussi, sous la forme discrétisée suivante

$$\kappa \varphi(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{N_E} \mathbf{v}_e \int_{E_e} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y - \sum_{e=1}^{N_E} \varphi_e \int_{E_e} \frac{\partial G}{\partial n_y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y$$

Ceci nécessite le recalcul des opérateurs  $[L_k]_{\Omega}$  et  $[M_k]_{\Omega}$  (1 ligne,  $N_E$  colonnes) pour chaque choix de point  $\mathbf{x}$ , afin d'obtenir le système matriciel suivant

$$\varphi(\mathbf{x}) = [L_k]_{\Omega}(\mathbf{v}) - [M_k]_{\Omega} \varphi \quad (26)$$

Le champ  $\varphi$  au point  $\mathbf{x}$  se calcule donc par simple produit matriciel, une fois  $[L_k]_{\Omega}$  et  $[M_k]_{\Omega}$  formées. La dérivée normale du champ  $\varphi(11)$  peut être calculée par une méthode similaire.

## 2.3 Singularité et méthode de régularisation

Les fonctions de Green et leurs dérivées (13) et (14), sont singulières lorsque le point courant  $\mathbf{y}$  rencontre le point d'évaluation  $\mathbf{x}$ . Donc la méthode de quadrature de Gauss utilisée dans l'évaluation des opérateurs élémentaires devient fortement imprécise lorsque les points de Gauss  $\mathbf{y}_g$  sont proches du point d'évaluation  $\mathbf{x}$ , à cause de la singularité.

Cependant, dans le cas de la représentation intégrale, le point d'évaluation  $\mathbf{x}$  n'appartient pas à la frontière  $\Gamma$  donc la singularité de la fonction de Green en  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  n'est pas rencontrée. Il faudra quand même manipuler les résultats avec précaution lorsque le point d'écoute  $\mathbf{x}$  sera proche de la frontière  $\Gamma$ .

Dans le cas de l'équation intégrale, les points d'évaluations  $\mathbf{x}$  sont les points de collocations  $\mathbf{x}_c$ . Tant que ceux-ci n'appartiennent pas à l'élément  $E_e$ , les opérateurs élémentaire (20), (21), (22), (23) sont tous réguliers puisque le point courant  $\mathbf{y}$  ne peut pas rencontrer la singularité en  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ .

Lorsque  $\mathbf{x}_c$  appartient à l'élément  $E_e$ , les opérateurs élémentaires sont singulières quand  $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$ . La singularité est levée en utilisant les propriétés suivantes, avec  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  (ref. [Ki]) :

$$\lim_{r \rightarrow 0} (G_k(r) - G_0(r)) = O(r^0)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial G_k}{\partial n_y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = O(r^0)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial G_k}{\partial n_x}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = O(r^0)$$

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\partial^2 G_k}{\partial n_x \partial n_y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{\partial^2 G_0}{\partial n_x \partial n_y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{1}{2} k^2 G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = O(r^0)$$

La première propriété se démontre par développement limité de  $e^{jkr}$  à l'ordre 1. Nous n'avons pas trouvé de démonstration pour les trois autres propriétés et S. Kirkup n'a pas cité ses sources.

Ainsi, la singularité des intégrales  $[M_k]_\Gamma$  (21) et  $[M_k^t]_\Gamma$  (22) a été levée : celles-ci sont majorées quand  $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$ , donc intégrables. Pour les intégrales  $[L_k]_\Gamma$  (20) et  $[N_k]_\Gamma$  (23), la méthode de régularisation proposée par S. Kirkup [Ki] a été retenue. Elle consiste en l'évaluation séparée des parties singulières et des parties intégrables en posant par différence

$$[L_k]_{E_e}(\mathbf{x}) = [L_0]_{E_e}(\mathbf{x}) + \int_{E_e} G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y \quad (27)$$

$$\begin{aligned} [N_k]_{E_e}(\mathbf{x}) &= [N_0]_{E_e}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} k^2 [L_0]_{E_e}(\mathbf{x}) \\ &+ \int_{E_e} \frac{\partial^2 G_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} - \frac{\partial^2 G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y} \\ &+ \frac{1}{2} k^2 G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y \end{aligned} \quad (28)$$

Les parties intégrales sont donc intégrables par points de Gauss (en veillant néanmoins à ce que les points de Gauss  $\mathbf{y}_g$  ne passent pas par le point de collocation  $\mathbf{x}_c$ ). Les parties singulières sont évaluées en repartitionnant l'élément  $E_e$  tel que  $\mathbf{x}_c$  devienne un nœud du maillage. La méthode détaillée est expliquée dans le livre de S. Kirkup (Ref. [Ki]) et les résultats utiles sont fournis en Annexe.

### 3 Equation intégrale hybride - The Schenck Method

Dans le cas d'un problème extérieur, même si la fonction  $\varphi$  satisfait l'équation intégrale discrétisée (18), il peut arriver que cette solution ne soit pas unique. En effet, il existe une infinité de valeurs du nombre d'onde  $k$  pour laquelle cette équation a des solutions multiples, et ces valeurs coïncident avec les valeurs propres fictives du problème intérieur associé. Afin de conserver l'unicité de la solution, Schenck [Sc], Burton et Miller [Bu] ont alors proposé d'utiliser les deux équations intégrales (15) et (16) pondérées par un poids  $\mu$ . Burton et Miller [Bu] ayant démontré que pour un poids complexe, cette formulation dite hybride assurera l'unicité de la solution  $\varphi$ , cette nouvelle formulation sera utilisée dans toute la suite, pour les problèmes intérieurs comme pour les problèmes extérieurs afin de pallier à d'éventuelles erreurs numériques. L'équation intégrale hybride discrétisée sous forme matricielle s'écrit alors :

$$([M_k]_\Gamma + \frac{1}{2} \kappa Id + \mu [N_k]_\Gamma) \varphi = ([L_k]_\Gamma + \mu ([M_k^t]_\Gamma - \frac{1}{2} \kappa Id)) \mathbf{v} \quad (29)$$

avec  $\mu = \frac{i}{k+1}$  tel que  $i$  le nombre complexe assure l'unicité de la solution du problème aux valeurs propres (ref. [Bu]) et  $k$  le nombre d'onde régularise l'équation (ref [Ki]).

## 4 Résolution de l'équation de surface hybride

De manière à prendre en compte les conditions aux limites, il reste à résoudre sous contraintes le système linéaire (29) qui est du type  $Ax = By$  avec  $A$  et  $B$  des matrices carrés pleines de taille  $n$  et  $x, y$  des vecteurs colonnes de longueur  $n$ . Dans le cas général, nous avons choisi de résoudre ce système en le mettant sous la forme d'une fonctionnelle  $J$  à minimiser.

Soit le système  $Ax - By = 0$ . La transposée de ce système est toujours nulle et vaut  $x^t A^t - y^t B^t = 0$ . Le produit de ces deux équations donne le système matricielle suivant :

$$K = \begin{pmatrix} A^t A & -A^t B \\ -B^t A & B^t B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi la fonctionnelle définie par

$$J(v) = \frac{1}{2} \langle K v, v \rangle$$

où  $K$  est une matrice symétrique est telle que

$$J'(v) = 0 \Leftrightarrow K v = 0 \sim Ax - By = 0 \quad \text{si } v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La contrainte imposée par les conditions aux frontières peut s'écrire sous la forme matricielle  $Cv = F$  où  $C$  est une matrice binaire d'existence formée à l'aide des vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{F}$  la valeur numérique des conditions aux limites.. On aboutit au système linéaire  $3n \times 3n$  suivant

$$\begin{pmatrix} K & C^t \\ C & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix}$$

qui est résolu notre programme en utilisant la décomposition LU.

L'avantage de cet algorithme est qu'il est très rapide. Mais nous n'avons pas réussi à démontré proprement l'équivalence à cause du facteur  $A^t$  qui apparaît quand on développe le terme  $Kv$ . Donc meme si cet algorithme donne des résultats cohérent, l'algorithme suivant développé par Kirkup (ref. [Ki]) peut être utilisé. Il résoud le système linéaire en le transformant sous la forme  $Cu = b$  avec  $u, b$  vecteurs colonnes de longueur  $n$  ou  $u$  est inconnue. Pour cela, on doit (ref. [Bo]) :

1. remplacer les conditions aux limites connues pour  $x$  et  $y$
2. envoyer les colonnes correspondante au second membre
3. résoudre le système linéaire carré  $Cu = b$

## 5 Résolution de l'équation aux valeurs propres

Soit  $k$  non nul, solution du problème aux valeurs propres  $\Delta\phi + k^2\phi = 0$  (7). Pour un problème de Dirichlet ou de Neumann homogène (condition de bord nulle pour  $\phi$  ou  $\partial_n\phi$ ), on obtient après insertion des conditions de frontière dans l'équation de surface (18) :

$$[L_k \partial_n \varphi]_{\Gamma}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pour des condition de Dirichlet}$$

$$[(M_k + \frac{1}{2}I)\varphi]_{\Gamma}(\mathbf{x}) = 0 \text{ pour des condition de Neumann}$$

L'équation aux valeurs propres peut s'écrire sous la forme générale  $A_k\phi = 0$  où  $A_k$  est une matrice dépendante du paramètre  $k$ . Il s'agit d'un problème aux valeurs propres non linéaire.

Une première méthode est de calculer les valeurs de  $k$  telles que :

$$\det(A_k) = 0$$

Mais  $A_k$  est une matrice très mal conditionnée de par sa formation et la recherche des zéros en est grandement compliquée.

S. Kirkup et S Amini [Ki] propose plutôt la méthode suivante :

1. Partitionner l'ensemble des valeurs de  $k$  en intervalle  $[k_A, k_B]$
2. Approximer  $A_k$  par une matrice polynomiale en  $k$  en effectuant une interpolation de Lagrange d'ordre  $m$  sur les abscisses de Tchebichev :

$$A_k \simeq A_0 + kA_1 + \dots + k^m A_m \text{ avec } k \text{ réel}$$

3. Ce qui permet de factoriser  $k$  et de reformuler le problème aux valeurs propres sous la forme linéaire classique :

$$\begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_{m-1} \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ k\phi \\ \vdots \\ k^{m-1}\phi \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -A_m \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ k\phi \\ \vdots \\ k^{m-1}\phi \end{pmatrix}$$

4. Sélectionner les solutions  $k$  en ne gardant que celles dont les parties réelles sont dans l'intervalle  $[k_A, k_B]$ . Puis ne garder de ces valeurs propres que celles dont la partie imaginaire est petite, considérée comme seules solutions physique du problème
5. Reconstruire les modes propres en résolvant l'équation de domaine (26) avec les conditions initiales et les valeurs de  $\phi$  calculées pour chaque valeur propre  $k_i$

## Deuxième partie

# Resultats

Avant de résoudre le problème aux valeurs propres dans un domaine extérieur et afin de valider les résultats numériques, nous avons travaillé sur un problème intérieur où des solutions analytiques sont connues (cf Annexe). Pour cela, nous nous sommes servi du code matlab de résolution de l'équation de Laplace en 2D et l'avons transformé en code de résolution d'un problème d'Helmoltz en 2D puis en 3D. Ensuite, nous avons créé un code en 2D pour le calcul des valeurs propres. Il nous reste donc à généraliser ce code en 3D et l'appliquer à un problème extérieur pour résoudre complètement le problème initial. Alors lorsque l'utilisateur donnera au programme son maillage (plan), celui-ci sortira les valeurs propres de résonance du domaine et l'utilisateur pourra calculer le champ rayonné en tout point de l'espace.

**Problème intérieur** On considère un fluide homogène isotrope dans un domaine  $D$  fermé par une frontière  $S$  sujet à des conditions définies sur cette frontière, de normale extérieure  $\mathbf{n}$  (cf. fig 2). On s'intéresse ici au calcul des valeurs propres de l'équation de Helmholtz (6) sans terme source (18). Dans ce cas particulier, la FEM donne déjà des résultats tout à fait confortables puisque l'espace est borné. Mais la BEM apporte néanmoins une souplesse dans la taille et la conception du maillage.

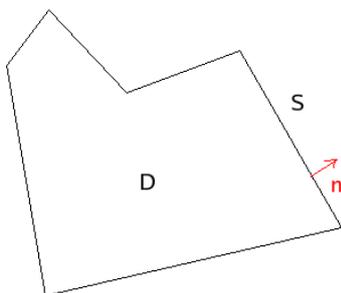


FIG. 2 – Problème intérieur

## 6 Problème intérieur plan

Nous allons nous placer dans le cadre d'un problème intérieur plan. L'algorithme que nous avons développé permet de calculer les valeurs propres d'une membrane rectangulaire ou circulaire, puis de représenter les modes propres associés. Cet algorithme, présenté en annexe, suit le schéma suivant :

**fonction** *interiortest.m*

1. Données initiales
  - fmin : fréquence de départ des valeurs propres
  - fmax : fréquence maximale des valeurs propres

- ce : célérité des ondes
  - tol : tolérance de la partie imaginaire pour l'acceptation des valeurs propres
  - m : ordre des polynomes d'interpolations pour le calcul des valeurs propres
2. Création du maillage de la frontière
    - fonction** *rectang* pour le rectangle
    - fonction** *circle* pour le disque
    - Donne les tables de coordonnées, connectivités, normales aux éléments en fonction du nombre "nSlem" d'éléments. On ajoute une donnée supplémentaire LC qui donne l'ordre de grandeur de la taille du domaine.
  3. Représentation des modes
    - Crée la table de coordonnées des nD points intérieurs pour représenter les modes propres à l'intérieur du domaine
  4. Isobarycentre par la **fonction** *isobarycentre.m*
    - Calcul les coordonnées globales des isobarycentres de chaque élément du maillage
  5. Test de conformité du maillage
    - Calcul le pas maximal des éléments par la **fonction** *pasmaxmesh.m* afin d'ajuster fmax pour que  $h < \frac{ce}{6f}$  pour tout f (bonne condition d'approximation car au minimum 6 éléments pour décrire une période du champ  $\varphi$ )
  6. Packaging
    - Regroupe toutes les données nécessaires à l'application de la BEM dans un objet nommé package.
  7. Calculs des valeurs propres et vecteur propres, **fonction** *eigenvalue.m*
    - (a) subdivision de [kmin,kmax] de manière itérative. On pose  $k_0 = kim$ , puis pour tout  $k_n$  tant que  $k_n < kmin$ , on se place sur l'intervalle  $[k_a, k_b] = [k_n - 1/k_n, k_n + 1/k_n]$  défini par récurrence par  $k_{n+1} = k_n + 1/k_n + 1/k_{n+1}$ . Ainsi, les intervalles forment une partition de l'espace des nombres d'ondes et deviennent plus fin quand  $k$  augmente de manière à compenser le fait que les valeurs propres soient de plus en plus rapprochées. On affine ce principe en prenant en compte la surface moyenne de l'objet  $LC^2$  et en faisant une meilleure approximation pour les petits nombre.  $[k_a, k_b]$  devient  $[k_n - 1/(k_n LC^2 + 1), k_n + 1/(k_n LC^2 + 1)]$
    - (b) Calcul des coefficients des polynômes d'interpolation de lagrange de la matrice  $A_k$ , **fonction** *coeff\_tchebychev.m*
      - i. calcul des abscisses de tchebychev sur [-1,1] selon l'ordre m souhaité
      - ii. Projection des abscises de tchebychev sur l'intervalle d'étude  $[k_a, k_b]$  et calcul des ordonnées par la **fonction** de k *Dirichlet.m*  
\*
      - iii. Calcul des polynômes de Lagrange génériques
      - iv. Calcul des polynômes d'interpolations de la fonction Dirichlet aux abscisses de Tchebychev et résultat sous forme de cellule

- (c) Résolution du système aux valeurs propres généralisé par la **fonction** *eig.m* de matlab.
  - (d) Test de conformité des valeurs propres : appartenance à l'intervalle d'étude et petite partie imaginaire
8. représentation des modes
- (a) Test de dégénérescence des valeurs propres (même nombre d'onde mais vecteur propres différents)
  - (b) Résolution de l'équation de domaine par la **fonction** *resolution-Rint.m*\*. Il n'y a pas d'équation de frontière à résoudre puisque  $v$  et  $\phi$  sont connues sur le bord
  - (c) Tracé des modes propres

\* Les deux **fonctions** *Dirichlet.m* et *resolutionRint.m* correspondent respectivement à la création de l'opérateur de frontière  $[L_k]_\Gamma$  et à la création des opérateurs de domaine  $[L_k]_\Omega$  et  $[M_k]_\Omega$ . Elles sont calculé pour un élément fixé pour chaque point de collocation. Marc Bonnet (Ref. [Bo]) propose de boucler pour un point de collocation fixé sur les éléments. Mais ceci imposerait de calculer à chaque itération la distance entre les points de gauss  $\mathbf{y}_g$  et le point de collocation  $\mathbf{x}_c$ . Nous avons donc préféré fixer les points de gauss sur un élément, exprimer leur coordonnées dans la base local de l'élément et calculer uniquement la distance entre le point de collocation et le centre de la base. Pour cela, nous avons :

1. Effectué un changement de base afin de nous placer pour un élément fixé dans la base locale associée
2. Utiliser les fonctions de formes et le Jacobien pour mapper les points de gauss de la base locale vers l'élément de référence
3. Intégrer sur l'élément de référence par points de Gauss

## 6.1 Calcul des Valeurs propres

On calcule les valeurs propres  $k$  de l'opérateur  $[L_k]$  sur carré de coté 1 pour des conditions de Dirichlet homogène en utilisant les **fonctions** *Dirichlet.m* et *eigenvalue.m*. Pour  $f_{min}=20\text{Hz}$  et  $f_{max}=750\text{Hz}$  (soit  $k_{min}=0.37$  et  $k_{max}=14.15$ ), on appelle  $n_{Selem}$  le nombre d'élément et  $m$  l'ordre du polynome d'interpolation de lagrange, on obtient :

N_S_elem	Ordre	Mode	sol. exacte	sol. approchée	erreur relative
20	2	1	4.44288294	4.43792869	-1.115e-03
20	2	2	7.02481473	7.00846030	-2.328e-03
20	2	4	9.93458827	9.90911433	-2.564e-03
N_S_elem	Ordre	Mode	sol. exacte	sol. approchée	erreur relative
40	2	1	4.44288294	4.44323224	7.862e-05
40	2	2	7.02481473	7.02279280	-2.878e-04
40	2	3	8.88576588	8.88015032	-6.320e-04
40	2	4	9.93458827	9.93166411	-2.943e-04
40	2	5	11.32717340	11.31687870	-9.088e-04
40	2	6	12.95311834	12.94906971	-3.126e-04
40	2	7	13.32864881	13.30848518	-1.513e-03

N_S_elem	Ordre	Mode	sol. exacte	sol. approchée	erreur relative
40	2	8	14.04962946	14.03339124	-1.156e-03
60	2	1	4.44288294	4.44371888	1.882e-04
60	2	2	7.02481473	7.02404273	-1.099e-04
60	2	3	8.88576588	8.88420995	-1.751e-04
60	2	4	9.93458827	9.93383614	-7.571e-05
60	2	5	11.32717340	11.32425069	-2.580e-04
60	2	6	12.95311834	12.95197661	-8.814e-05
60	2	7	13.32864881	13.32315510	-4.122e-04
60	2	8	14.04962946	14.04533508	-3.057e-04

Avec l'erreur relative calculée comme

$$\frac{Val_{th} - Val_{num}}{|Val_{th}|}$$

Pour un nombre d'élément donné, la précision diminue vite dès que  $k$  devient trop grand et l'algorithme peut ne pas voir les solutions. D'où l'importance du critère  $kh < 1$ . Pour  $nSelem = 60$ , ce critère est rempli.

La précision des résultats n'a pas vraiment varié selon l'ordre d'interpolation  $m$ . On a aussi cherché l'influence de l'intervalle d'interpolation  $[k_A, k_B]$ . Pour cela on s'est placé autour d'une valeur propre  $k$  puis on a regardé le résultat sur un intervalle du type  $[k - \alpha, k + \alpha]$  avec  $\alpha$  de plus en plus petit. La précision des résultats n'a pas trop changé non plus.

Donc l'algorithme initial avec  $m=3$  à l'air de fonctionner correctement. Cependant, celui-ci est très lent puisqu'il évolue en  $1/k$ . Donc pour améliorer la rapidité, on pourrait coder une fonction itérative qui balaye toutes les plages de fréquence avec  $m$  petit et  $[k_A, k_B]$  relativement grand dans un premier temps, puis qui affine les résultats en prenant un intervalle en  $1/k$  centré sur les valeurs trouvées précédemment avec un  $m$  grand. On aurait ainsi un algorithme itératif beaucoup plus rapide.

## 6.2 Visualisation des modes propres

Une fois les valeurs propres calculées, on peut visualiser les modes propres à l'aide de la fonction `resolutionRint.m`. Pour les modes du carré obtenu précédemment, on retrouve les modes théoriques (cf fig. 3) avec les phénomènes de dégénérescence dus à l'égalité  $L_x = L_y$  dans la solution analytique du rectangle (ref. [Fl]). On a fait les calculs avec  $m=3$  et  $nSelem=60$ .

On observe pour certains modes des dégénérescences. On n'explique toujours pas ce phénomène qui n'apparaît pas dans le cas du rectangle, mais le livre de Philipp Morse (ref. [Mo]) devrait nous éclairer sur ce sujet.

On a aussi, pour les mêmes conditions aux limites, tracé les modes propres pour le disque de rayon 1 (cf fig. 4). On pourra comparer ces résultats avec les modes théoriques du livre de Michel Bruneau [Br]. De plus, dans le calcul des valeurs propres, on retrouve bien les zéros des fonctions de Bessel cylindrique (ref. [Ha]) :

N_S_elem	Ordre	Mode	sol. exacte	sol. approchée
----------	-------	------	-------------	----------------

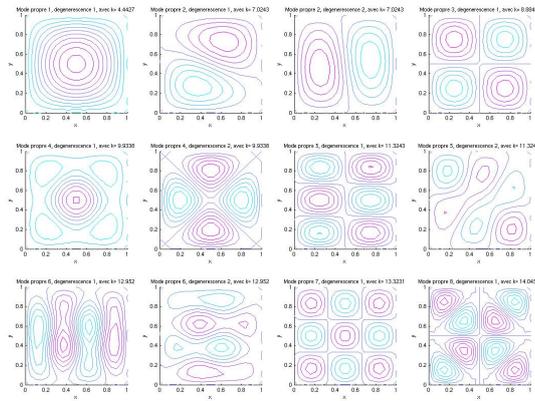


FIG. 3 – Mode propre du carré  $[0, 1]^2$  calculés numériquement, Les lignes nodales (ou le champ intérieur est nul) sont en violet

60	3	1	2.40482	2.40761671
60	3	2	3.83171	3.83610130
60	3	3	5.13562	5.14138463
60	3	4	5.52007	5.52645619
60	3	5	6.38016	6.38705132
60	3	6	7.01559	7.02363592
60	3	7	7.58834	7.59608128
60	3	8	8.41724	8.42668961
60	3	9	8.65372	8.66373264
60	3	10	8.77148	8.77973896

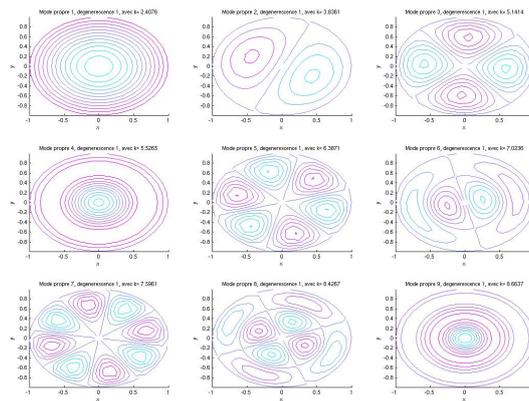


FIG. 4 – Mode propre du disque de rayon 1 calculés numériquement, Les lignes nodales (ou le champ intérieur est nul) sont en violet

## 7 Problème intérieur spatial

Nous nous plaçons désormais dans le cadre d'un problème intérieur en trois dimension. Les solutions analytiques calculées en annexe nous permettent de tester l'algorithme de rayonnement qui résoud l'équation intégrale hybride (29) et qui calcul la représentation intégrale (26). Ces algorithmes ne sont pas détaillé dans ce rapport.

Pour les tester, nous utilisons le protocole de vérification suivant :

1. On connaît une solution analytique d'un problème de Dirichlet homogène
2. On dérive cette solution analytique
3. On résoud par l'algorithme de BEM un problème de Neumann en imposant sur la frontière la dérivée analytique
4. Le champ  $\varphi$  calculé doit être nul sur la frontière et identique à la solution analytique dans le domaine

Nous avons tester notre algorithme sur 2 objets, un cube de côté 1 composé de 600 éléments et une sphère de rayon 1 composée de 882 éléments. Les résultats sont données par les figures (6 et (7)). Les figures 3D sont tracées à l'aide de la fonction *plotmesh.m* L'ordre de grandeur du champ sur la surface est de  $10^{-2}$ , ce qui est plutôt correct.

De plus, pour le carré, la figure 5 donne l'erreur relative du champ intérieur au domaine pour les points  $(0.5, 0.5, z)$  avec  $z$  variant entre 0 et 1. On voit que plus on s'approche des bords, plus l'erreur augmente, ce qui est conforme à la théorie.

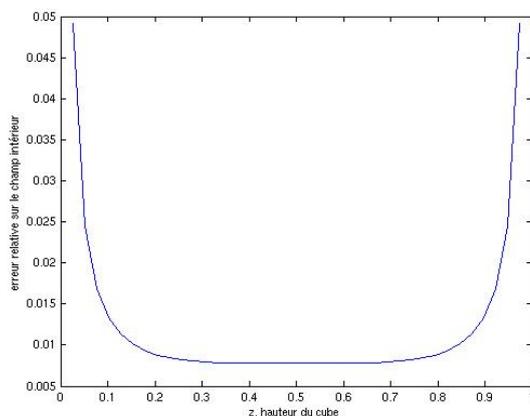


FIG. 5 – Protocole de vérification appliqué au cube  $[0, 1]^3$ . Erreur relative sur les points du domaine  $(0.5, 0.5, z)$  avec les nombres quantiques  $k_x = k_y = k_z = 1$  pour un cube de côté 1.

## 8 Conclusion

A l'heure actuelle, l'algorithme deux dimensions est complet et au vu des résultats prêt à être appliqué à notre problème : la recherche des valeurs propres

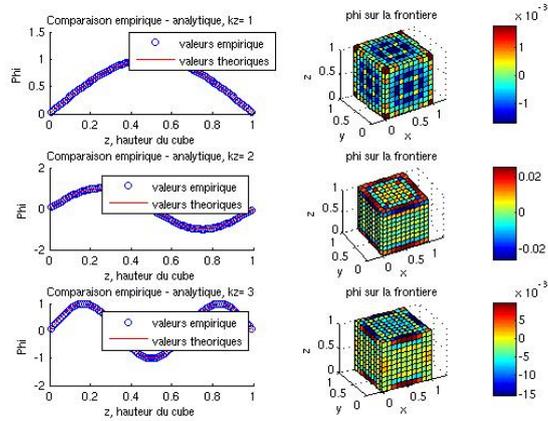


FIG. 6 – Protocole de vérification appliqué au cube  $[0, 1]^3$ . Sur les figures de gauche, les valeurs numériques dans le domaine aux points  $(0.5, 0.5, z)$  (rond bleu) sont comparées aux valeurs théorique (trait rouge), pour les nombres quantiques  $k_x = k_y = 1$  et  $k_z$  qui vaut respectivement 1 2 et 3. Les figures de droite donnent elles le champ  $\varphi$  sur la frontière, théoriquement nul.

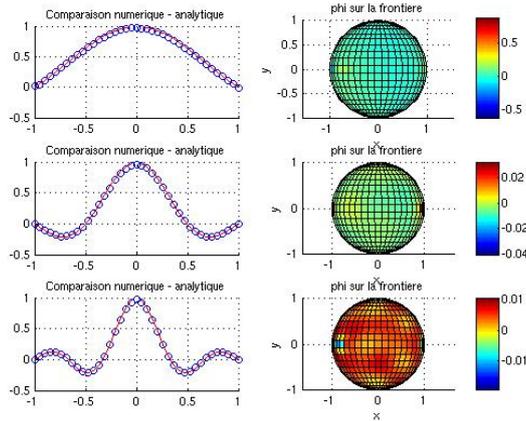


FIG. 7 – Protocole de vérification appliqué à la sphère de rayon unité. Sur les figures de gauche, les valeurs numériques dans le domaine aux points  $(0, 0, z)$  (rond bleu) sont comparées aux valeurs théorique (trait rouge), pour les nombres quantique  $m$  qui valent respectivement 1 2 et 3. Les figures de droite donnent elles le champ  $\varphi$  sur la frontière, théoriquement nul.

pour un résonnateur en milieu infini. Il permettra de calculer les valeurs propres, puis de calculer le champ  $\varphi$  en tout points de l'espace. L'algorithme en trois dimensions devrait bientôt être prêt pour le calcul des valeurs propres et fonctionne déjà pour la représentation du champ  $\varphi$  en tout point de l'espace. Afin d'optimiser les temps de calcul qui sont relativement long, nous envisageons une adaptation d'un algorithme type Fast Multipole pour la recherche des valeurs

propres. Ce type d'algorithme n'ayant pas encore été développé, il y a encore beaucoup de travail pour y arriver. Mais cela permettrait d'optimiser les temps de calculs, donc la précision de l'algorithme.

## A Fonctions de Green et ses dérivées

Les opérateurs  $L$ ,  $M$ ,  $M^t$  et  $N$  font intervenir la fonctions de green  $G_k$  et ses dérivées normales. Les formules suivantes (ref. [Ki]) en donnent des formes exploitables dans le cas de la dimension 3 avec  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  des vecteurs de l'espace tel que  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$  et  $r = |\mathbf{r}|$ .

Expression des dérivées normales de  $G_k$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_k}{\partial n_y} &= \frac{\partial G_k}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n_y} \\ \frac{\partial G_k}{\partial n_x} &= \frac{\partial G_k}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n_x} \\ \frac{\partial^2 G_k}{\partial n_x \partial n_y} &= \frac{\partial G_k}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial n_x \partial n_y} + \frac{\partial^2 G_k}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial n_x} \frac{\partial r}{\partial n_y}\end{aligned}$$

Expression des dérivées normales de  $r$

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial n_y} &= \frac{-\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_y}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial n_x} &= \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_x}{r} \\ \frac{\partial^2 r}{\partial n_x \partial n_y} &= -\frac{1}{r} (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y) + \frac{\partial r}{\partial n_x} \frac{\partial r}{\partial n_y}\end{aligned}$$

Expression des dérivées radiales de  $G_k$  en dimension 3

$$\begin{aligned}G_k(r) &= \frac{e^{jkr}}{4\pi r} \\ \partial_r G_k(r) &= \frac{e^{jkr}}{4\pi r^2} (jkr - 1) \\ \partial_{rr}^2 G_k(r) &= \frac{e^{jkr}}{4\pi r^3} (2 - 2jkr - k^2 r^2)\end{aligned}$$

Expression des dérivées radiales de  $G_k$  en dimension 2

$$\begin{aligned}G_k(r) &= \frac{j}{4} H_0^{(1)}(kr) \\ \partial_r G_k(r) &= \frac{-jk}{4} H_1^{(1)}(kr) \\ \partial_{rr}^2 G_k(r) &= \frac{jk^2}{4} \left( \frac{H_1^{(1)}(kr)}{kr} - H_0^{(1)}(kr) \right)\end{aligned}$$

ou  $H_0^{(1)}$  et  $H_1^{(1)}$  sont les fonctions de Hankel cylindrique de première espèce respectivement d'ordre 0 et 1. Celle-ci sont sont données dans le Handbook (ref. [Ha]), avec  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  pour  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^n$

## B Solutions analytiques

### B.1 Solution analytique du cube

On considère le cube  $[0, 1]^3 \in R^3$  centré sur un sommet. On cherche une solution de l'équation d'Helmholtz (6) sous la forme

$$\varphi = X(x)Y(y)Z(z)$$

dans un système de coordonnées carthésiennes (ref. [Br]).

En écrivant (6) sans terme source comme :

$$\frac{\Delta X(x)Y(y)Z(z)}{X(x)Y(y)Z(z)} + k^2 = 0$$

On obtient

$$\frac{\partial_{xx}^2 X(x)}{X(x)} + \frac{\partial_{yy}^2 Y(y)}{Y(y)} + \frac{\partial_{zz}^2 Z(z)}{Z(z)} = -k^2$$

Ainsi chaque terme de l'équation est constant et on peut la réécrire sous la forme  $-K_x^2 - K_y^2 - K_z^2 = -k^2$  telle que :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial^2 x} + K_x^2 X = 0$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial^2 y} + K_y^2 Y = 0$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial^2 z} + K_z^2 Z = 0$$

La solution générale s'écrit alors :

$$\varphi = A \cos(K_x x + \phi_x) \cos(K_y y + \phi_y) \cos(K_z z + \phi_z)$$

Si on considère un problème de Dirichlet homogène tel que  $\bar{\varphi}_D = 0$ , alors :

$$\varphi(0, y, z) = \varphi(x, 0, z) = \varphi(x, y, 0) = 0, \forall x, y, z \in \mathfrak{R}$$

donc

$$\phi_x = \phi_y = \phi_z = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

d'où

$$\varphi = \tilde{A} \sin(K_x x) \sin(K_y y) \sin(K_z z)$$

De même :

$$\varphi(1, y, z) = \varphi(x, 1, z) = \varphi(x, y, 1) = 0, \forall x, y, z \in \mathfrak{R}$$

donc en posant  $K_x = k_x \pi$ ,  $K_y = k_y \pi$  et  $K_z = k_z \pi$  avec  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_z$  entiers relatifs, on obtient que le champ  $\varphi$  intérieur au cube s'exprime en coordonnées carthésiennes :

$$\varphi(x, y, z) = \tilde{A} \sin(k_x \pi x) \sin(k_y \pi y) \sin(k_z \pi z) \quad \forall (x, y, z) \in R^3 \quad (30)$$

avec

$$k^2 = \pi^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

## B.2 Solution analytique de la sphere

On considère la sphere centrée en 0 et de rayon 1. On se place dans un système de coordonnées sphérique et comme pour le cube, on va chercher une solution sous la forme de variable séparées :

$$\varphi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

Alors en réécrivant l'équation d'helmoltz (6) sous la forme

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = -k^2$$

Et le laplacien en coordonnées sphérique

$$\Delta = \frac{\partial_r(r^2\partial_r[\bullet])}{r^2} + \Delta_{\theta,\varphi}[\bullet]$$

On obtient l'équation suivante :

$$\frac{1}{R}\partial_{rr}^2R(r) + \frac{2}{rR(r)}\partial_rR(r) + k^2 = \frac{f(\theta,\phi)}{r^2}$$

Le membre de gauche multiplié par  $r^2$  est donc égal à une constante que l'on écrit  $n(n+1)$ . On a donc :

$$\frac{r^2R''(r)}{R(r)} + \frac{2r}{R(r)}R'(r) + k^2r^2 = n(n+1)$$

qui est équivalent à

$$r^2R''(r) + 2rR'(r) + [k^2r^2 - n(n+1)]R(r) = 0$$

On fait le changement de variable suivant  $x = kr$ . En constatant que  $\frac{\partial}{\partial r} = k\frac{\partial}{\partial x}$  et en posant  $Y(x) = R(\frac{x}{k})$  Alors l'équation précédente peut se mettre sous la forme de l'équation de Bessel sphérique d'ordre  $n$  :

$$x^2Y''(x) + 2xY'(x) + [x^2 - n(n+1)]Y(x) = 0 \quad (31)$$

Cette équation (31) ressemble à l'équation de Bessel cylindrique d'ordre  $n$  au coefficient 2 près devant la dérivée première. Le changement de variable  $Y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}U(x)$  dans l'équation précédente donne l'équation de Bessel cylindrique :

$$x^2\frac{\partial^2U(x)}{\partial x^2} + x\frac{\partial U(x)}{\partial x} + [x^2 - \gamma^2]U(x) = 0 \quad (32)$$

avec  $\gamma = (n+1/2)$ .

Des solutions particulières indépendantes de cette équation (32) sont les fonctions de Bessel cylindrique de première et de seconde espèce respectivement  $J_\gamma(x)$  et  $N_\gamma(x)$  (Ref. [Hal]). La solution générale de cette équation (32) est une combinaison linéaire de ces solutions particulières.

Grâce au changement de variable, on obtient les solutions particulières de l'équation (31) appelées fonctions de Bessel sphérique de première et de seconde

espèce d'ordre  $n$ , que l'on note respectivement  $j_n(x)$  et  $n_n(x)$  (Ref. [Ha]) et qui valent.

$$j_n(x) = \alpha \frac{1}{\sqrt{x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

$$n_n(x) = \alpha \frac{1}{\sqrt{x}} N_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

avec  $\alpha$  une constant choisie égale à  $\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$ . La solution générale d'ordre  $n$  de l'équation (31) est une combinaison linéaire des solutions particulières sphérique :

$$R(r) = \lambda j_n(kr) + \mu n_n(kr)$$

Si on considère des conditions de Dirichlet homogène sur le bord  $\Gamma$ , alors la symétrie du problème nous pousse à chercher des solutions de helmholtz (6) uniquement radiale :  $\varphi = R(r)$ . Donc les fonction de Bessel spérique (31) deviennent solutions de l'équation de Helmholtz. En particulier,  $j_0(kr)$  et  $n_0(kr)$  sont des solutions et nous en connaissons les expressions analytique :

$$j_0(kr) = \frac{\sin(kr)}{kr}$$

$$n_0(kr) = -\frac{\cos(kr)}{kr}$$

Si de plus  $\bar{\varphi}_D = 0$ , alors  $kr = 0[\pi]$ . Comme notre sphère est de rayon 1, le nombre d'onde  $k$  est tel que  $k = m\pi$  avec  $m$  entier relatif. Alors

$$\varphi(r) = \frac{\sin(m\pi r)}{m\pi r}$$

$$\varphi(r) = \frac{\cos(m\pi r)}{m\pi r}$$

sont des solutions particulières et leur dérivées seront aisément calculable.

### B.3 Autres solutions analytiques

D'autres solutions analytiques de l'équation d'Helmholtz  $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$  sont connues. En particulier dans le plan, si on considère des conditions de Dirichlet homogène sur le bord ( $\varphi_\Gamma = 0$ ), alors en utilisant la même décomposition que précédemment (ref. [F1]), on obtient :

- Pour une membrane rectangulaire de cotés  $L_x$  et  $L_y$ , les solutions sont de la forme :

$$\varphi(x, y) = A \sin\left(\frac{k_x \pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{k_y \pi y}{L_y}\right) \quad \forall (x, y) \in \mathfrak{R}^3$$

avec  $k^2 = \pi^2 \left( \left(\frac{k_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{k_y}{L_y}\right)^2 \right)$

- Pour une membrane circulaire de rayon  $r$ , les solutions sont les fonctions de Bessel cylindrique d'ordre  $n$   $J_0(kr), J_1(kr), \dots, J_n(kr)$  définies précédemment.

Maintenant que nous avons établi des solutions analytiques, nous pouvons passer à la réalisation de l'algorithme et nous pourrons comparer nos résultats aux solutions théorique.

## C Intégration singulière pour un problème à deux dimension

En notant  $a + b$  la longueur de l'élément, alors

$$[L_0]_{E_e} = \frac{1}{2\pi}(a + b - a \log a - b \log b)$$

$$[N_0]_{E_e} = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Pour le problème à 3 dimension, cf Kirkup [Ki]

## D Algorithme en 2 dimensions

Tous les algorithmes sont annotés avec des pourcents matlab.

### D.1 interiortest.m

Fonction de base de l'algorithme de calcul des valeurs propres dans un domaine plan

```
clear all
clc
tic

ce=333; % celerite des ondes dans le fluide
fmin=20;
fmax=750;
tol=10^-3; % Tolerance de la partie imaginaire des valeurs propres
m=3; % Degre du polynome d'interpolation

%% Rectangle
% l=1; % largeur
% L=1; %longueur
% LC=(1+L)/2; % longueur caracteristique
% n_S_elem = 60; % nombre d'éléments, pour le carré un multiple de 4
% [vertpts,elemvert,normales]=rectang(l,L,n_S_elem); %creation du maillage
%
% % Représentation des modes
% Nint=20;
% pas=1/(Nint-1);
% PAS=L/(Nint-1);
% [X,Y]=meshgrid(0:pas:1,0:PAS:L);
% n=Nint;
% p=Nint;
% points=[reshape(X,1,Nint^2);reshape(Y,1,Nint^2)]';
% n_D=length(points);
%
% %Valeurs de modes propres théorique pour le carré de cote 1
```

```

% iter=1;
% for i=1:10
%     for j=1:i
%         Theo(iter,1)=pi*norm([i,j]);
%         iter=iter+1;
%     end
% end
% Theo=sort(Theo);
% clear iter

%% Disque
% Construction des tables
r=1;
LC=2*r;
n_S_elem=30;
[vertpts,elemvert,normales]=circle(r,n_S_elem) ;

% Représentation des modes
Nint=30;
[X,Y]=meshsphere(r,Nint);
[n,p]=size(X);
X1=reshape(X,n*p,1);
Y1=reshape(Y,n*p,1);
points=[X1,Y1];
n_D=length(points);

%% Données utiles
package{1}=n_S_elem;
package{2}=vertpts;
package{3}=elemvert;
package{4}=normales;
package{5}=isobarycentre(n_S_elem,elemvert,vertpts);

H=pasmax_mesh(package);
package{8}=H;% Longueur maximale d'un element
package{9}=LC;% Longueur caracteristique

package{10} = 2*pi*fmin/ce;% premier nombre d'onde
package{11} = 2*pi*fmax/ce;% dernier nombre d'onde

%% Calcul des valeurs propres
if 2*pi*fmax/ce*H>1
    fmax=ce/(2*pi*H);
    package{11}=1/H;
    disp('Le maillage n est pas assez fin pour calculer toutes les valeurs propres')
    disp(['fmax= ',num2str(floor(fmax))]);
    disp(' ')

```

```

end

disp(['kmin = ', num2str(package{10})])
disp(['kmax = ', num2str(package{11})])

[ValP,VecP]=eigenvalue(package,tol,m);

disp('Calculs des modes propres et fréquences propres OK')
disp('les fréquences propres sont (en Hz): ')
format short g
VPf=real(ValP(:,1)).*(ce/(2*pi));
disp(VPf)

if ValP==0
    break
end

%% Valeurs propres théorique pour le carré
iter=1;
for i=1:10
    for j=1:i
        Theo(iter,1)=pi*norm([i,j]);
        iter=iter+1;
    end
end
Theo=sort(Theo);
clear iter

%% Représentation des modes
mod=0;
k=0;
%fprintf('N_S_elem  Ordre  Mode  sol. exacte  sol. approchée  erreur relative \n')

for i=1:length(VecP)
    if abs(k-real(ValP(i)))<10^-3 % Test de degenerescence
        k=real(ValP(i));
        deg=2;
    else
        mod=mod+1;
        deg=1;
        k=real(ValP(i));
        %fprintf(' %2d          %2d  %2d  %10.8f          %10.8f          %8.3e \n',n_S_e
    end

    % Resolution des equations integrales
    [L_D,M_D] = resolution_Rint(k,n_D,points,n_S_elem,package{5},normales,vertpts,elemvert

    phi_D=L_D*VecP{i};

```

```

% trace
subplot(1,2,1)
mesh(X,Y,reshape(phi_D,n,p))
xlabel('x')
ylabel('y')
colormap cool

subplot(1,2,2)
title(['Mode propre ',num2str(mod),', degenerescence ',num2str(deg),', avec k= ',num2s
hold on
[C,h] = contour(X,Y,reshape(phi_D,n,p));
set(h,'ShowText','on','TextStep',get(h,'LevelStep'))
xlabel('x')
ylabel('y')
colormap cool
colorbar
hold off

pause
clf

clear phi_D
clear phi_S
clear v_S

end

```

## D.2 rectang.m

Création d'un maillage rectangulaire.

```

function [vertpts,elemvert,normale]=rectangle(1,L,N)
Nel=N/4;
h=1/(Nel); %Pas de discrétisation
H=L/(Nel); %Pas de discrétisation

% table coordonnée
x=[0:h:1 , 1*ones(1,Nel) , 1-h:-h:0 , zeros(1,Nel-1)];
y=[zeros(1,Nel+1) , H:H:L , L*ones(1,Nel) , L-H:-H:H];
vertpts=[x',y'];

%table connectivité
elemvert=[1:N; 2:N+1]';
elemvert(N,2)=1; % correction pour le dernier element

% table normales extérieures
for i=1:N
    a=vertpts(elemvert(i,2),1) - vertpts(elemvert(i,1),1);
    b=vertpts(elemvert(i,2),2) - vertpts(elemvert(i,1),2);

```

```

    normale(i,1)=1/sqrt(a^2+b^2) * b;
    normale(i,2)=1/sqrt(a^2+b^2) * -a;
end

```

### D.3 circle.m

Création d'un maillage circulaire.

```

function [vertpts,elemvert,normale]=circle(r,N)
h=2*pi/N; %Pas de discrétisation

% table coordonnée
x=r*cos(0:h:2*pi);
y=r*sin(0:h:2*pi);
vertpts=[x',y'];

%table connectivité
elemvert=[1:N; 2:N+1]';
elemvert(N,2)=1; % correction pour le dernier element

% table normales extérieures
for i=1:N
    a=vertpts(elemvert(i,2),1) - vertpts(elemvert(i,1),1);
    b=vertpts(elemvert(i,2),2) - vertpts(elemvert(i,1),2);

    normale(i,1)=1/sqrt(a^2+b^2) * b;
    normale(i,2)=1/sqrt(a^2+b^2) * -a;
end

```

### D.4 isobarycentre.m

Fonction qui calcul les coordonnées des isobarycentres des éléments d'un maillage. Utilisée pour la méthode de Collocation par points.

```

function [isobar]=isobarycentre(n_S_elem,elemvert,vertpts)
% sort les isobarycentre de chaque element

for el=1:n_S_elem
    vertices_el_G=[vertpts(elemvert(el,1),:);
    vertpts(elemvert(el,2),:)];

    isobar(el,:)=1/2*(sum(vertices_el_G,1));
end

```

### D.5 pasmax mesh.m

Fonction qui calcul le plus grand pas des éléments d'un maillage. Utilisé pour la vérification de finesse du maillage

```

function H=pasmax_mesh(package)

[qa,qb]=vertices(package{1},package{2},package{3});

i=1;
H=0;
while i<=package{1}
    if norm(qb(i,:)-qa(i,:))>H
        H=norm(qb(i,:)-qa(i,:));
    end
    i=i+1;
end

```

## D.6 eigenvalue.m

Fonction de calcul des valeurs propres  $k$  dans un problème de Dirichlet.

```

function [ValP,VecP]= eigenvalue(package,eps,m)
% Retourne les valeurs propres et vecteurs propres associés du laplacien
% entre 0 et fmax (Hz)
%
% l est la largeur et L la longueur
% n_S_elem est le nombre d'éléments du maillage initial
% eps est la tolerance de validation des valeurs propres
% m est l'ordre du polynome d'interpolation
% LC est la longueur caracteristique

%% Initialisation
iter=1;
VecP=cell(1);
ValP=0;
n_S_elem=package{1};
k=package{10};
kmax=package{11};
LC=package{9}^2;% Longueur caracteristique au carre

% Matrices utiles
ZA=zeros(n_S_elem*(m-1),n_S_elem*m);
for i=1:n_S_elem*(m-1)
    ZA(i,i+n_S_elem)=1;
end

ZB=zeros(n_S_elem*(m-1),n_S_elem*m);
for i=1:n_S_elem*(m-1)
    ZB(i,i)=1;
end

%% Algorithme
while k<=kmax
    % Pas de maillage

```

```

Min=max(0.3 , k-(pi/2)/(LC*k+1)); % 0.3 =~ 20Hz
Max=k+(pi/2)/(LC*k+1);
disp(['k = ',num2str(k)])

% Coeff de lagrange
c=coeff_tchebychev(Min,Max,m,'Dirichlet',package);

% Matrices du systeme aux valeurs propres generalisees
A=[c{1}];
for j=2:m
    A=[A,c{j}];
end
A=[A;ZA];

B=[zeros(n_S_elem,n_S_elem*(m-1)),-c{m+1}];
B=[B;ZB];

[V,D] = eig(A,B);
D=diag(D);

% test des valeurs propres
for j=1:length(D)
    if real(D(j))<Max && real(D(j))>Min && abs(imag(D(j)))<eps
        ValP(iter,1)=D(j);
        VecP{iter}=V(1:n_S_elem,j);

        iter=iter+1;
    end
end
delta=(1-LC*Max)^2+4*LC*(Max+pi/2);
k=(LC*Max-1 + sqrt(delta))/(2*LC);
end

```

## D.7 coeff tchebychev.m

Utilisée pour calculer les coefficients des polynomes d'interpolation de Lagrange d'ordre m aux abscisses de Tchebichev. Optimisé pour les fonction matricielles.

```

function [c]=coeff_tchebychev(a,b,m,f,package)
% c cellules qui contient toutes les matrices [A0,A1,A2,A3,...,Am] Coefficients
% du polynome d'interpolation d'ordre m>1 de Lagrange d'une fonction f
% matricielle sur l'intervalle [a,b], évaluée aux abscisses de Tchebichev alpha_n.
% f est une chaine de caractere!!!!!!!!!!!!!!

%% Abscisses de Tchebitchev d'ordre m
n=m+1;

for h=1:n

```

```

        alpha_n(h,1)=cos((2*h-1)*pi/(2*n));
end

% Conversion de [-1,1] vers [a,b]
g=@(u) (b-a)/2.*u + (b+a)/2; % fonction de conversion

k_n=g(alpha_n);% abscisses sur l'intervalle [a,b]

%% initialisation des ordonnées
M1=feval(f,k_n(1),package);
[nn,mm]=size(M1);
y_n=reshape(M1,1,nn*mm);

for i=2:length(k_n)
    k_ni=k_n(i);
    Mk=feval(f,k_ni,package);
    [nn,mm]=size(Mk);
    y_n=[y_n;reshape(Mk,1,nn*mm)];% ordonnées de f sur l'intervalle [a,b]
end

%% Calcul des polynomes de lagrange
L=ones(n,n);

for j=1:n

    i=1;
    Unew=1;

    while i<j
        Uold=Unew;

        Unew0 = [-Uold.*k_n(i) , 0];
        Unew1 = [0,Uold];

        Unew = 1/(k_n(j)-k_n(i)).*(Unew0 + Unew1);

        i=i+1;
    end

    i=i+1;

    while i<=n

        Uold=Unew;

        Unew0 = [-Uold.*k_n(i) , 0];
        Unew1 = [0,Uold];

```

```

        Unew = 1/(k_n(j)-k_n(i)).*(Unew0 + Unew1);

        i=i+1;

    end

    L(j,:)=Unew;

end

for i=1:mm*nn
    Y=y_n(:,i);
    Bk(i,:)=Y.'*L;
end

%% coeff de Lagrange sous forme de matrice 3D
Ak=reshape(Bk,nn,mm,n);

%% résultat sous forme de cellule
c = cell([1,n]);

for i=1:n
    c{i}=Ak(:, :, i);
end

```

## D.8 Dirichlet.m

C'est la fonction fondamentale dans une méthode de BEM. Elle calcul ici l'opérateur matriciel L pour un problème aux valeurs propres avec conditions de Dirichlet. On retrouve cette fonction décliné dans plusieurs variante en fonction des opérateurs dont on a besoin. Nous utilisons ici la méthode de Collocation par point en se plaçant pour chaque élément dans une base locale qui lui est associée. L'évaluation des intégrales élémentaire se fait par points de Gauss et les intégration singulière sont traitées à part. Cette fonction, comme les autres, est commentée, afin de bien expliqué les détails de construction.

```

function [Dirichlet]=Dirichlet(k,package)

%% Données initiales
oo2pi = 0.5/pi;

n_S_elem=package{1};
vertpts=package{2};
elemvert=package{3};
normales=package{4};
isobar=package{5};

%% Resolution
L=zeros(n_S_elem,n_S_elem);

```

```

for el=1:n_S_elem
    % normales de l'element
    nq=normales(el,:);

    % Sommets en coordonnées globales
    vertices_el_G=[vertpts(elemvert(el,1),:)
        vertpts(elemvert(el,2),:)];

    % longueur de l'element
    qbma = vertices_el_G(2,:)-vertices_el_G(1,:);
    qlen = norm(qbma);

    %Matrice de rotation
    R=[qbma./qlen;nq].';

    % Isobarycentre de l'element en coordonnées globales
    q=isobar(el,:);

    % Calculs des coordonnées locales des sommets
    vertices_el_L = (vertices_el_G-ones(2,1)*q)*R(:,1);% pas la dernière colonne puisque 1

    % Points de gauss sur [0,1]
    [w,x,ngauss]=gl();

    % Place les points de gauss sur l'element dans la base locale
    onesnp=ones(1,ngauss);
    delta=qlen.*x;
    qasame=vertices_el_L(1).*onesnp;
    x=qasame+delta;

    % Poids de gauss et Jacobien
    wdetJ=qlen.*w;

    %=====
    onesne=ones(n_S_elem,1);
    onesng=ones(1,ngauss);

    % Point de Collocation en local
    p=(isobar-onesne*q)*R;

    % Vecteur rr de chaque q_gauss->p en local
    px= p(:,1)*onesng;

    ptsx=onesne*x(1,:);

    rrx=px-ptsx;
    rry= p(:,2)*onesng;

```

```

r=sqrt(rrx.^2+rry.^2);

%=====
% Fonctions de bessel cylindrique
bess0=@(z) besselh(0,1,z);

% derivees de Gk et G0 selon r
gk=i/4 .*bess0(k.*r);
g0=-oo2pi.*log(r(e1,:));

%=====
% calcul des operateurs
L(:,e1)=wdetJ*(gk).';
%=====

% Integration singuliere
L(e1,e1)=0;

% Calculs de l0
pqalen=abs(vertices_el_L(1));
pqblen=abs(vertices_el_L(2));

l0=(qlen-(pqalen*log(pqalen)+pqblen*log(pqblen)))*oo2pi;

% Calcul pour L
gkmg0=gk(e1,:)-g0;
L(e1,e1) = l0 + wdetJ*gkmg0.';

end

Dirichlet = L ;

```

## D.9 resolution Rint.m

On retrouve ici encore l'algorithme de BEM. Mais cette fois ci c'est pour calculer les opérateurs de domaine L et M. Donc pas d'intégration singulière et cette fois les points d'évaluation sont les points du domaine.

```

function [L,M] = resolution_Rint(k,n_eval,evaluation_pts,n_S_elem,collocation_pts,normales

L=zeros(n_eval,n_S_elem);
M=zeros(n_eval,n_S_elem);

wait = waitbar(0,'calcul des operateurs de domaine...');

```

```

for el=1:n_S_elem
    % normales de l'element
    nq=normales(el,:);

    % Sommets en coordonnées globales
    vertices_el_G=[vertpts(elemvert(el,1),:)
        vertpts(elemvert(el,2),:)];

    % longueur de l'element
    qbma = vertices_el_G(2,:)-vertices_el_G(1,:);
    qlen = norm(qbma);

    %Matrice de rotation
    R=[qbma./qlen;nq].';

    % Isobarycentre de l'element en coordonnées globales
    q=collocation_pts(el,:);

    % Calculs des coordonnées locales des sommets
    vertices_el_L = (vertices_el_G-ones(2,1)*q)*R(:,1);% pas la dernière colonne puisque

    % Points de gauss sur [0,1]
    [w,x,ngauss]=gl();

    % Place les points de gauss sur l'element dans la base locale
    onesnp=ones(1,ngauss);
    delta=qlen.*x;
    qasame=vertices_el_L(1).*onesnp;
    x=qasame+delta;

    % Poid de gauss et Jacobien
    wdetJ=qlen.*w;

    %=====
    onesne=ones(n_eval,1);
    onesng=ones(1,ngauss);

    % Point de Collocation en local
    p=(evaluation_pts-onesne*q)*R;

    % Vecteur rr de chaque q_gauss->p en local
    px= p(:,1)*onesng;

    ptsx=onesne*x(1,:);

    rrx=px-ptsx;
    rry=p(:,2)*onesng;

```

```

r=sqrt(rrx.^2+rry.^2);

%=====
% Fonctions de bessel cylindrique
bess0=@(z) besselh(0,1,z);
bess1=@(z) besselh(1,1,z);

% Fonctions de bessel spérique
% bess0=@(z) sqrt(pi./(2.*z)).*besselh(0+1/2,1,z);
% bess1=@(z) sqrt(pi./(2.*z)).*besselh(1+1/2,1,z);

% derivees de Gk et G0 selon r
gk=i/4 .*bess0(k.*r);
gkr=-i/4*k .*bess1(k.*r);

% derivee de rr selon nq
rnq=-rry./r;

%=====
% calcul des operateurs
L(:,el)=wdetJ*(gk).';
M(:,el)=wdetJ*(gkr.*rnq).';

waitbar(el/n_S_elem,wait)

end

close(wait)

```

## Références

- [Bo] Marc Bonnet, *Equations intégrales et éléments de frontière*, CNRS édition / Eyrolles, 1995
- [Ki] Stephen Kirkup, *The Boundary Element Method in Acoustics*, <http://www.boundary-element-method.com>, 1998-2007
- [Jo] Nicolas Joly, *Modélisation Vibro-Acoustique, Elément finis / Eléments frontières*, Université du Maine, 2007
- [Im] J.F. Imbert, *Analyse des structures par éléments finis*, Cepadues Editions, 1979
- [Le] Alexis Le Pichon, *Thèse : Méthode de prédiction du rayonnement Acoustique de structures volumique*, ENST, 1996
- [Br] Michel Bruneau, *Introduction aux théories de l'acoustique*, Université du Maine - Le mans, 1983
- [Ha] Milton Abramowitz et Irene A. Stegun, *Handbook of mathematical function*, Dover Publication, 1965
- [Bu] A.J. Burton and G.F. Miller, *The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problem*, Proc. Royal Society London A. 323 (201-210), 1971
- [Fl] Neville H. Fletcher et Thomas D. Rossing, *The physics of musical instruments*, Springer, 1999
- [Te] Isabelle Terrasse et Toufic Abboud, *Modélisation des phénomènes de propagation d'ondes*, Cours de Math Appliqué de 3eme année de l'Ecole Polytechnique, 2007
- [Sc] Harry A. Schenck, *Improved Integral Formulation for Acoustic Radiation Problems*, Naval undersea Warfare Center San Diego, 1967
- [So] A. Sommerfeld, *Die Greensche Funktionen der Schwingungsgleichung*, Jahresber. Deutsch. Math. Verein., 21 (1912), 309-353.
- [Mo] Philip M. Morse, *Vibration and sound*, MIT, 1936