

# Vers une généralisation multidimensionnelle de la notion de géodésique sur les groupes de Lie (1<sup>ère</sup> partie).

FLORIE-ANNE BAUGÉ, JOËL BENSOAM

IRCAM, centre G. Pompidou, CNRS UMR 9912, Acoustic Instrumental Team  
1 place I. Stravinsky 75004 Paris, France

## Résumé :

La procédure de réduction par symétrie peut s'appliquer à une poutre de Reissner. Modélisé sous la forme d'un assemblage de sections rigides, ce système mécanique présente une symétrie dans la mesure où il est invariant sous l'action du groupe des rotations et des translations. Cet article présente un état de l'art des méthodes de réduction et tente d'établir un lien logique entre les différentes approches (géométrie différentielle, formulation Lagrangienne ou Hamiltonienne, formalisme de Poisson) afin d'envisager, dans un second temps, la théorie des champs (approche « covariante ») qui nécessite une généralisation, parfois délicate, des outils de la géométrie.

## Abstract :

The reduction techniques can be applied to a Reissner beam : modeled as an assembly of rigid sections, the mechanical system is invariant under the action of a group of symmetry. This article presents a state of the art of these reduction methods and aims to establish a logical link between different approaches (differential geometry, Hamiltonian or Lagrangian formulation, Poisson formalism) in order to consider, in a second step, the field theory (*covariant approach*) which requires a generalization, sometimes tricky, of the tools of geometry.

**Mots clefs :** Géométrie ; Symétrie ; Acoustique

## Introduction

L'utilisation des symétries pour simplifier la résolution d'un problème de mécanique remonte aux travaux d'Euler, Lagrange, Hamilton, Routh, Jacobi, Liouville, Poincaré ... Ceux-ci ont étudié la possibilité de réduire la taille de l'espace des phases en se servant de l'ensemble des symétries et des lois de conservation qui leurs sont associées.

Cette procédure de réduction peut, par exemple, s'appliquer à une poutre de Reissner [7] (modélisée sous la forme d'un assemblage de sections rigides). Ce système mécanique présente une symétrie dans la mesure où il est invariant sous l'action du groupe des rotations et des translations. La géométrisation de ce problème, envisagée sous une forme classique, consiste à déterminer l'évolution de la déformée de la poutre à chaque instant.

L'approche classique appelée *dynamique*, présente la difficulté de considérer un espace des configurations de dimension infinie. Les solutions sont les courbes géodésiques d'un espace de fonctions. L'alternative est de considérer non plus un unique paramètre d'évolution (le temps) mais plusieurs (le temps et l'espace). On parle alors d'approche *covariante* où l'espace des configurations est de dimension finie : celle du groupe de symétrie (voir [3] pour une définition des approches *dynamique/covariante*).

Le tableau 1 permet de résumer les principaux résultats de mécanique analytique envisagés selon plusieurs formalismes (géométrie différentielle, formulation Lagrangienne ou Hamiltonienne, formalisme de Poisson). Cet article présente un état de l'art des méthodes de réduction par symétrie (deuxième

colonne de Tab. 1) en tentant d'établir un lien logique entre ces différentes approches. Cette étude est envisagée dans le contexte *dynamique* où il n'existe qu'une seule variable indépendante : le temps.

	« Dynamique »			« Covariante »
	Équations	Réduction	Symétries / Conservation	Équations
Géométrie	Géodésique $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$	Configurations sur le groupe $M = G$	Orbite Thm. de E. Noether	Fibrés
Lagrange	Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = 0$	Euler-Poincaré $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right) = ad_{\boldsymbol{\xi}}^* \frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\xi}}$	$\frac{d}{dt} \left( Ad_g^* \frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right) = 0$	$div \left( \frac{\partial l}{\partial \sigma} \right) = -ad_{\boldsymbol{\xi}} \frac{\partial l}{\partial \sigma}$  $Curv(\sigma) = 0$
Hamilton	Hamilton $\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = \dot{\mathbf{p}} \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = -\dot{\mathbf{q}} \end{cases}$	Hamilton-Poincaré $\frac{d\boldsymbol{\pi}}{dt} = ad_{\frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\pi}}}^* \boldsymbol{\pi}$	$\frac{d}{dt} \left( Ad_g^* \boldsymbol{\pi} \right) = \dot{\boldsymbol{\pi}}^s = 0$	$div \boldsymbol{\mu} = ad_{\frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\mu}}}^* \boldsymbol{\mu}$
Poisson	$\dot{F} = \{F, H\}$	Lie-Poisson $\{f, h\}(\boldsymbol{\pi}) = \left( \boldsymbol{\pi}, \left[ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\pi}}, \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\pi}} \right] \right)$	$\{J, h\} = 0$	Crochet de Schouten-Nijenhuis

Tableau 1– **Un même problème physique, quatre approches différentes.** Ce tableau rassemble différents points de vue de la littérature et leurs déclinaisons pour la détermination des équations du mouvement, la réduction de problèmes comportant des symétries et l'identification des quantités conservées.

La symétrie d'un système physique est l'invariance de son lagrangien sous l'action d'un groupe de Lie  $G$ . En présence de symétries, les différents formalismes peuvent être écrits sous une forme réduite sur le groupe. Maintes fois étudiée, l'approche Lagrangienne est rappelée en premier, aboutissant aux équations d'Euler-Poincaré. Une interprétation géométrique de ces équations sera donnée en section 2, à la lumière d'Arnold [1] qui affirme que les mouvements d'un système physique présentant des symétries, gouverné par un principe de moindre action, sont des géodésiques sur le groupe  $G$  considéré. Nous verrons, dans la section 3, que la forme de Poincaré-Cartan joue un rôle crucial dans la relation entre les formalismes Lagrangien et Hamiltonien (transformation de Legendre) et que sa différentielle est à l'origine de la forme symplectique et du crochet de Lie-Poisson (section 4).

## 1 Lagrangien réduit : équation d'Euler-Poincaré

Lorsqu'un système présente des symétries, son mouvement peut être décrit par une courbe  $g(t)$  sur le groupe  $G$  et son Lagrangien peut être écrit sous la forme  $L(g, \dot{g}, t)$ ,  $\dot{g} \in T_g G$ . Le principe de moindre action, qui se traduit par  $\delta \int L dt = 0$ , peut alors être envisagé sur l'algèbre de Lie,  $\mathfrak{g} = T_e G$ , en introduisant le Lagrangien réduit  $l = l(\boldsymbol{\xi}, t)$ , où  $\boldsymbol{\xi} = dL_{g^{-1}} \dot{g} \in \mathfrak{g}$ . Résoudre le principe de moindre action,  $\delta \int L(g, \dot{g}, t) dt = 0$ , est équivalent [6, p. 451] à minimiser l'action réduite,  $\delta \int l(\boldsymbol{\xi}, t) dt = 0$ , sous la condition<sup>1</sup>

$$\delta \boldsymbol{\xi} = \dot{\boldsymbol{\eta}} + [\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}]. \tag{1.1}$$

La trajectoire critique (optimum parmi un ensemble de trajectoires virtuelles sur l'algèbre de Lie, vérifiant les mêmes conditions initiales et finales, voir Fig. 1) vérifie alors les équations d'Euler-Poincaré (voir par exemple [5, 6])

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right) - ad_{\boldsymbol{\xi}}^* \frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\xi}} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial l}{\partial \xi_k} \right) - C_{ik}^j \xi_i \frac{\partial l}{\partial \xi_j} = 0 \tag{1.2}$$

où les  $C_{ij}^k$  sont les coefficients de structure du groupe, signature du groupe. La première équation est une formulation intrinsèque des équations du mouvement, la seconde est écrite dans un système de coordonnées.

1. Le crochet de Lie est étendu à l'algèbre de Lie :  $[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}] = \boldsymbol{\mu} \in \mathfrak{g}$  tel que  $\mathbf{X}_{\boldsymbol{\mu}} = [\mathbf{X}_{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{X}_{\boldsymbol{\eta}}]$ , où  $\mathbf{X}_{\boldsymbol{\mu}} = dL_g \boldsymbol{\mu} \in T_g G$  est le champ de vecteurs (invariant à gauche) engendré par  $\boldsymbol{\mu}$ .

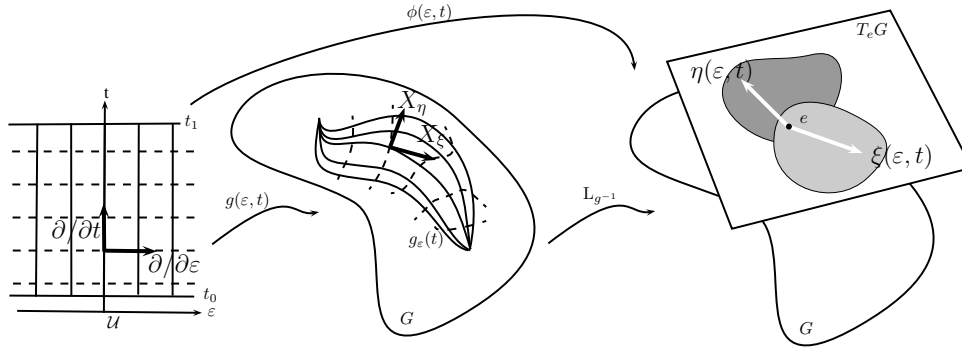


FIGURE 1- Variations de trajectoires virtuelles (mêmes conditions initiales et finales) sur le groupe. L'application  $\phi = L_{g^{-1}(\epsilon, t)}g(\epsilon, t)$  et la forme  $\Xi = dL_{g^{-1}}dg$  permettent d'opérer une réduction dans l'algèbre.

## 2 Approche géométrique

Dans cette section nous nous proposons d'interpréter géométriquement les équations d'Euler-Poincaré pour un système mécanique soumis à sa seule énergie cinétique. Le but est de montrer que l'équation des géodésiques,  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$ , écrite sur le groupe  $G$  est équivalente aux équations d'Euler-Poincaré (Eq. 1.2). Pour cela, on considère l'équation des géodésiques écrite en coordonnées, obtenue en munissant l'espace tangent à la variété d'une base invariante à gauche  $\{\mathbf{E}_i\}$

$$\dot{\xi}_k + \xi_j \xi_j \Gamma_{ij}^k = 0, \quad (2.1)$$

où la vitesse le long de la géodésique est notée  $\dot{\gamma} = \xi_i \mathbf{E}_i$  et où les  $\Gamma_{ij}^k$  sont les coefficients de Christoffel de la connexion considérée.

En présence de symétries pour retrouver les équations d'Euler-Poincaré, les coefficients de Christoffel de la connexion de Levi-Civita  $\nabla$  (connexion métrique et symétrique) doivent être exprimés sur le groupe à l'aide de la formule de Kozul [4, p. 55] et des coefficients de structure<sup>2</sup>. En remplaçant les coefficients de Christoffel dans l'équation des géodésiques (Eq. 2.1) et en remarquant que  $\frac{\partial l}{\partial \xi} = \mathbb{G} \xi \in \mathfrak{g}^*$ , où  $\mathbb{G}$  est la métrique sur l'algèbre de Lie liée à l'inertie du système physique, les équations en coordonnées (Eq. 1.2 b) du mouvement sont retrouvées. Ensuite, pour obtenir la formulation intrinsèque (Eq. 1.2 a), il suffit de remarquer que l'opérateur adjoint dual<sup>3</sup> est un opérateur matriciel qui s'exprime en fonction des coefficients de structure par

$$(ad_{\xi}^*)_{kj} = \xi_i C_{ik}^j$$

L'opérateur  $ad^*$  est, par définition, propre au groupe. Les informations sur le système étudié sont, elles, contenues dans la métrique et donc dans les éléments de l'algèbre de Lie duale qui sont des moments.

## 3 Hamiltonien réduit : équation de Hamilton-Poincaré

Le formalisme Hamiltonien réduit est, quant à lui, obtenu en introduisant de façon naturelle la *forme de Poincaré-Cartan* dans le principe de moindre action réduit et en considérant la variation de l'action sur des trajectoires réelles dont les conditions aux limites dépendent d'un paramètre de variation, voir Fig. 2. La différentielle de la forme de Poincaré-Cartan, appelée *forme pré-symplectique*, permet alors d'obtenir les équations du mouvement.

2.  $C_{ij}^k \mathbf{E}_k = [\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j]$

3. L'opérateur adjoint dual  $ad^* : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$  est défini à partir de l'opérateur adjoint et à l'aide du produit dual par  $(ad_{\xi}^* \pi, \eta) = (\pi, ad_{\xi} \eta)$ , où  $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ ,  $\pi \in \mathfrak{g}^*$ . L'opérateur adjoint  $ad : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  est défini par  $\forall \xi, \eta \in \mathfrak{g}$ ,  $ad_{\xi} \eta = \mu \in \mathfrak{g}$  tel que  $[\mathbf{X}_{\xi}, \mathbf{X}_{\eta}] = \mathbf{X}_{\mu}$  où  $\mathbf{X}_{\mu} = dL_{g^{-1}} \mu \in T_g G$  est le champ de vecteur (invariant à gauche) engendré par  $\mu$ .

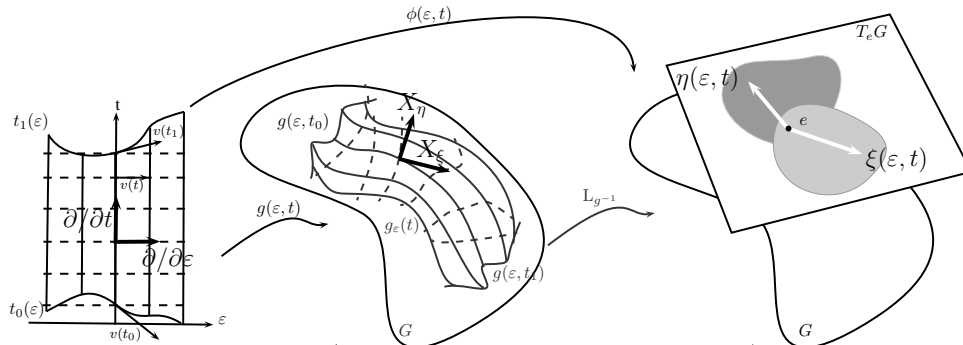


FIGURE 2- Variations de trajectoires réelles (conditions initiales et finales variables) sur le groupe. Les variations sont opérées à temps constant **sauf** aux bords  $t_i = t_i(\varepsilon)$ . L'application  $\phi = L_{g^{-1}(\varepsilon, t)}g(\varepsilon, t)$  et la forme  $\Xi = dL_{g^{-1}}dg = \xi dt + \eta d\varepsilon$  permettent d'opérer une réduction dans l'algèbre.

Le principe de moindre action est obtenu en exprimant la variation de l'action,  $\delta A$ , dans la direction  $\mathbf{v}(\varepsilon, t)|_{\varepsilon=0}$ . À l'aide de la formule de Cartan<sup>4</sup>, on a

$$dA(\mathbf{v}) = \int_{t_0(\varepsilon)}^{t_1(\varepsilon)} \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(l dt)|_{\varepsilon=0} = [l dt]_{t_0(\varepsilon)}^{t_1(\varepsilon)} + \int_{t_0(\varepsilon)}^{t_1(\varepsilon)} \frac{\partial l}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} dt$$

où  $\mathcal{L}$  est la dérivée de Lie. Ce qui, en intégrant par parties, donne

$$\delta A = \left[ \frac{\partial l}{\partial \xi} \boldsymbol{\eta} + l dt(\mathbf{v}) \right]_{t_0(\varepsilon)}^{t_1(\varepsilon)} - \int_{t_0(\varepsilon)}^{t_1(\varepsilon)} \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial l}{\partial \xi} \right) - \text{ad}_{\xi}^* \frac{\partial l}{\partial \xi} \right) \boldsymbol{\eta} dt. \quad (3.1)$$

Pour des trajectoires réelles, le terme sous l'intégrale est nul et le principe de moindre action se résume alors à  $\delta A = \left[ \frac{\partial l}{\partial \xi} \boldsymbol{\eta} + l dt(\mathbf{v}) \right]_{t_0(\varepsilon)}^{t_1(\varepsilon)} = 0$ , évalué sur des bornes variables. Sur ces bords,  $t_i(\varepsilon)$ , la direction de variation vaut  $\mathbf{v}|_{t_i} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{dt_i}{d\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t}$ . La forme<sup>5</sup>  $\Xi = dL_{g^{-1}}dg$ , évaluée dans cette direction, donne alors  $\boldsymbol{\eta} = \Xi(\mathbf{v}) - \xi dt(\mathbf{v})$  en fonction de  $\mathbf{v}$  (voir Fig. 2). Ceci permet, en remplaçant  $\boldsymbol{\eta}$  dans la variation de l'action,  $\delta A$ , d'obtenir une forme différentielle : la forme de Poincaré-Cartan

$$\omega = \boldsymbol{\pi} \Xi - h dt$$

à condition de poser de nouvelles variables  $\boldsymbol{\pi} = \frac{\partial l}{\partial \xi}$  et  $h = \frac{\partial l}{\partial \xi} \xi - l(\xi)$ ; la transformée de Legendre sur les groupes de Lie apparaît alors naturellement. Nous allons montrer dans la suite que cette forme de Poincaré-Cartan **réduite** permet d'obtenir les équations de Hamilton et le formalisme de Poisson en présence de symétries.

Dans l'espace d'évolution  $\mathbb{R} \times (G \times \mathfrak{g}^*)$  représenté par le triplet  $(t, g, \boldsymbol{\pi})$ , le raisonnement fait par E. Cartan dans [2] permet de montrer que la quantité  $I = \oint_{\Gamma(\alpha)} \omega$ , où  $\Gamma(\alpha)$  est une courbe fermée sur un tube de trajectoires réelles, est un invariant intégral qui ne dépend que du tube. Le calcul de la variation de  $I$  par rapport à  $\alpha$  montre alors que le champ  $\mathbf{X}$  tangent aux trajectoires réelles vérifie

$$\mathbf{X} \lrcorner \zeta = 0 \quad \text{et donc} \quad \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \zeta = 0 \quad (3.2)$$

où  $\zeta = -d\omega = -(d\boldsymbol{\pi} \wedge \Xi + \boldsymbol{\pi} d\Xi - dh \wedge dt)$  est la 2-forme pré-symplectique réduite ( $\lrcorner$  désigne le produit intérieur<sup>6</sup>). La seconde équation de (Eq. 3.2) traduit l'invariance de la forme pré-symplectique le long des trajectoires. L'autre est équivalente aux équations du mouvement. Pour s'en convaincre, il suffit de l'expliciter et, à l'aide de l'équation de structure de Maurer-Cartan<sup>7</sup>,  $d\Xi + [\Xi, \Xi] = 0$  [6, p. 276], de remplacer  $d\Xi$  par le crochet de Lie. On obtient alors<sup>8</sup> :

$$0 = \mathbf{X} \lrcorner \zeta = \left( d\boldsymbol{\pi}(\mathbf{X}) - \text{ad}_{\Xi(\mathbf{X})}^* \boldsymbol{\pi} \right) \Xi + \left( \Xi(\mathbf{X}) - \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\pi}} \right) d\boldsymbol{\pi} + \left( \frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{\pi}} d\boldsymbol{\pi}(\mathbf{X}) \right) dt \quad \forall \Xi, d\boldsymbol{\pi}, dt$$

4. *Magic Rule* :  $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\nu = d(\mathbf{v} \lrcorner \nu) + \mathbf{v} \lrcorner d\nu$ , où  $\nu$  est une forme différentielle, et  $\lrcorner$  est le produit intérieur.

5. appelée *forme de Maurer-Cartan*

6.  $\mathbf{X} \lrcorner \zeta = \zeta(\mathbf{X}, \cdot)$ , aussi noté  $\iota_{\mathbf{X}} \zeta$ .

7. Cette équation est équivalente à la condition sur les variations (Eq. 1.1). La démonstration est généralement faite pour les groupes matriciels [6, p. 276]. Elle est plus difficile pour les autres.

8. en remarquant que  $(\boldsymbol{\pi}, [\Xi(\mathbf{X}), \Xi]) = (\text{ad}_{\Xi(\mathbf{X})}^* \boldsymbol{\pi}, \Xi)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d\pi(\mathbf{X}) = \text{ad}^*_{\frac{\partial h}{\partial \pi}} \pi \\ \Xi(\mathbf{X}) = \frac{\partial h}{\partial \pi} \\ \frac{\partial h}{\partial \pi} d\pi(\mathbf{X}) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

La première équation de (Eq. 3.3) est équivalente aux équations du mouvement et est appelée équation d'Hamilton-Poincaré. Puisque  $\Xi$  est la forme de Maurer-Cartan, on a  $\Xi(\mathbf{X}) = \xi$ . La seconde équation est donc la transformée de Legendre inverse. La dernière est équivalente<sup>9</sup> à  $dh(\mathbf{X}) = \frac{\partial h}{\partial t}$ . Le terme  $dh(\mathbf{X})$  exprime la variation de l'Hamiltonien réduit le long des trajectoires. Cette quantité est souvent notée  $\frac{dh}{dt} = \dot{h}$  dans la littérature. Si l'Hamiltonien réduit ne dépend pas explicitement du temps, *i.e.*  $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$ , alors  $h$  est un invariant le long des trajectoires. On parle alors de conservation de l'énergie.

## 4 Formalisme de Poisson réduit : équation de Lie-Poisson

Un système de Lie-Poisson est défini sur l'algèbre de Lie dual  $\mathfrak{g}^*$ . L'évolution d'une variable dynamique  $f : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$  est régie par [5, p. 207]

$$\dot{f}(\pi) = \{f, h\}(\pi), \quad (4.1)$$

où  $\pi \in \mathfrak{g}^*$  et où la fonction  $h : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction Hamiltonienne réduite. Le crochet de Lie-Poisson est défini<sup>10</sup> à l'aide du produit dual  $(\cdot, \cdot) : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\{f, h\}(\pi) = -\left(\pi, \left[\frac{\partial f}{\partial \pi}, \frac{\partial h}{\partial \pi}\right]\right) \quad (4.2)$$

pour lequel  $\frac{\partial f}{\partial \pi}, \frac{\partial h}{\partial \pi} \in \mathfrak{g}$  et  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  est le crochet de Lie dans  $\mathfrak{g}$ . On trouve aussi dans la littérature la forme Hamiltonienne (Eq. 3.3 a), obtenue en utilisant la dérivée de fonctions composées à partir de l'équation de Poisson (Eq. 4.1). Ainsi le terme de gauche,  $\dot{f}(\pi)$ , devient  $\left(\dot{\pi}, \frac{\partial f}{\partial \pi}\right)$  et le terme de droite :

$$\{f, h\}(\pi) = \left(\pi, \left[\frac{\partial h}{\partial \pi}, \frac{\partial f}{\partial \pi}\right]\right) = \left(\pi, \text{ad}^*_{\frac{\partial h}{\partial \pi}} \frac{\partial f}{\partial \pi}\right) = \left(\text{ad}^*_{\frac{\partial h}{\partial \pi}} \pi, \frac{\partial f}{\partial \pi}\right)$$

Ainsi, l'équation de *Hamilton-Poincaré* (Eq. 3.3)  $\dot{\pi} = \text{ad}^*_{\frac{\partial h}{\partial \pi}} \pi$  est équivalente à (Eq. 4.1), compte tenu de (Eq. 4.2). Les équations (Eq. 4.1) et (Eq. 4.2) sont souvent données telles quelles dans la littérature. Nous allons tenter d'illustrer l'esprit de la démarche permettant de les obtenir en s'inspirant des travaux de J.-M. Souriau.

Dans [8, p. XVI], J.-M. Souriau propose d'effectuer une projection temporelle de l'espace d'évolution vers l'espace des mouvements<sup>11</sup>. Dans notre cas, cette projection s'effectue de  $\mathbb{R} \times G \times \mathfrak{g}$  vers  $G \times \mathfrak{g}$  (temps constant), transformant ainsi la forme pré-symplectique  $\zeta$  en la forme symplectique  $\sigma$  :

$$\sigma = \pi [\Xi, \Xi] - d\pi \wedge \Xi$$

Et J.M. Souriau assure [8, p. XX] que « *la description d'un système dynamique au moyen de son espace des mouvements est aussi complète que celle que donne l'espace d'évolution.* ». Cela se vérifie en évaluant la forme symplectique  $\sigma$  le long d'un champ de vecteurs,  $\mathbf{X}^V$ , tangent aux trajectoires réelles (donc vérifiant (Eq. 3.3)) dans l'espace des mouvements<sup>12</sup>. Alors, avec la formule de Cartan on obtient

$$\mathfrak{L}_{\mathbf{X}^V} \sigma = 0 \quad (4.3)$$

Le champ  $\mathbf{X}^V$  rend donc invariante la forme symplectique,  $\sigma$ , tout comme le champ  $\mathbf{X}$  rend invariante la forme pré-symplectique  $\zeta$  (voir (Eq. 3.2), section 3).

La forme symplectique,  $\sigma$ , permet de définir un champ Hamiltonien,  $\mathbf{Y}_f$ , associé à n'importe quelle fonction Hamiltonienne  $f$ , en spécifiant

$$\mathbf{Y}_f \lrcorner \sigma = df$$

9. car  $dh = \frac{\partial h}{\partial \pi} d\pi + \frac{\partial h}{\partial t} dt$

10. Les équations données ici sont vraies pour un système invariant à gauche. Dans le cas d'un système invariant à droite (mécanique des fluides) elles restent vraies à des changements de signes près. La définition complète du crochet de Lie-Poisson est [6, p. 11] :  $\{f, h\}^\pm = \pm \left(\pi, \left[\frac{\partial f}{\partial \pi}, \frac{\partial h}{\partial \pi}\right]\right)$  où le symbole  $\pm$  donne l'indication des signes dans le cas invariant à droite (partie supérieure) ou à gauche (partie inférieure).

11. espace des phases

12. on se place à temps constant donc  $dh = \frac{\partial h}{\partial \pi} d\pi$

En particulier, pour l'Hamiltonien du système :  $\mathbf{X}^V \lrcorner \sigma = dh$ . Alors, la variation de  $f$  le long des trajectoires,  $df(\mathbf{X}^V)$ , notée  $\dot{f}$ , est telle que  $\dot{f} = \sigma(\mathbf{Y}, \mathbf{X}^V)$ . D'où, en définissant le crochet de Lie-Poisson comme  $\{f, g\} = \sigma(\mathbf{Y}_f, \mathbf{Y}_g)$ , on retrouve (Eq. 4.1). L'expression du crochet de Lie-Poisson, (Eq. 4.2), en terme de produit dual s'obtient alors comme ceci :

$$\begin{aligned} \{f, h\} &= \sigma(\mathbf{Y}, \mathbf{X}^V) = -\sigma(\mathbf{X}^V, \mathbf{Y}) = -d\pi(\mathbf{Y}) \Xi(\mathbf{X}^V) = -\left(\text{ad}_{\Xi(\mathbf{Y})}^* \pi, \Xi(\mathbf{X}^V)\right) \\ &= -\left(\pi, [\Xi(\mathbf{Y}), \Xi(\mathbf{X}^V)]\right) = -\left(\pi, \left[\frac{\partial f}{\partial \pi}, \frac{\partial h}{\partial \pi}\right]\right) \end{aligned}$$

En résumé, la différentielle de la forme de Poincaré-Cartan réduite permet de donner une expression au crochet de Lie-Poisson. La démarche présentée est féconde mais nécessite certainement plus de rigueur. Pour la rendre convaincante, il faut aborder d'autres espaces de représentation tels que les fibrés (principaux et co-tangents, par exemple).

## Conclusion

Cet article a tenté d'établir un lien logique entre les différents points de vue adoptés dans la littérature pour traiter de l'évolution du mouvement d'un système mécanique et en particulier, de la réduction du problème en présence de symétries, sous une approche *dynamique* (une seule variable d'évolution, le temps). Le formalisme de Lie-Poisson sur  $\mathfrak{g}^* \simeq T^*G/G$  peut être considéré comme l'équivalent du formalisme de Poisson pour un système présentant une symétrie décrite par le groupe  $G$ . Plus précisément, la fonction Lagrangienne  $L$  définie sur le fibré tangent  $TG$ , invariante sous l'action de  $G$ , est réduite à la fonction  $l$  définie sur  $\mathfrak{g} \simeq TG/G$ . Puisqu'il s'agit d'un système Lagrangien réduit, il est naturel de définir une transformation de Legendre réduite permettant de lui faire correspondre un système Hamiltonien réduit régi par l'équation d'Hamilton-Poincaré. Il y a équivalence entre les équations d'Euler-Poincaré (Eq. 1.2) et d'Hamilton-Poincaré (Eq. 3.3). En résumé, pour des systèmes Lagrangien / Hamiltonien hyper-réguliers<sup>13</sup> le diagramme suivant commute

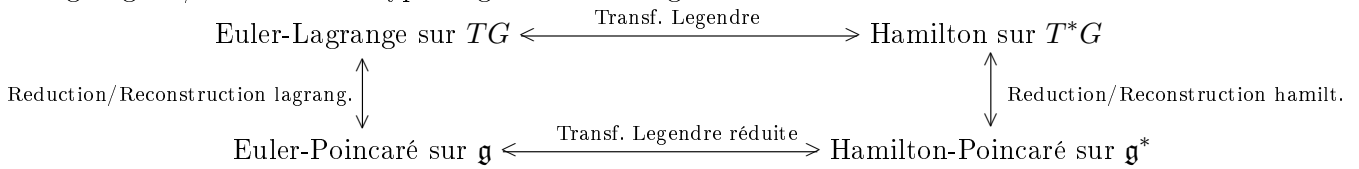


FIGURE 3- Diagramme de commutativité des représentations Lagrangienne et Hamiltonienne

L'établissement de ce lien logique nous semble nécessaire pour pouvoir aborder la formulation *covariante* (plusieurs variables indépendantes, par exemple pour la poutre de Reissner : le temps et l'espace), qui a l'avantage de mettre en jeu des espaces de dimension finie. Il s'agit donc d'étendre les démarches présentées ici à des opérateurs multi-vectoriels. La forme symplectique, par exemple, devient polysymplectique, et la notion d'espace fibré est alors primordiale. L'appréhension de l'ensemble des outils nécessaires à cette extension multi-dimensionnelle fait l'objet du travail en cours.

## Références

- [1] V. I. Arnold. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. *Annales l'Ins. Fourier*, pages 319–361, 1966.
- [2] E. Cartan. *Leçons sur les invariants intégraux*. 1922.
- [3] M. Castrillón López and J. E. Marsden. Covariant and dynamical reduction for principal bundle field theories. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 34, 2008.
- [4] M. P. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston, MA, 1992.
- [5] D. D. Holm. *Gemetric Mechanics Part II : Rotating, Translating and Rolling*. 2nd edition, 2011.
- [6] J. E. Marsden and T. S. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. 2nd edition, 1998.
- [7] E. Reissner. On one-dimensional large-displacement finite-strain beam theory. *Studies in applied mathematics*, 52(2) :87–95, 1973.
- [8] J.-M. Souriau. *Structure des systèmes dynamiques*. 1970.

13. Si l'application définie par la transformée de Legendre réduite  $\pi = \frac{\partial l}{\partial \xi}$ ,  $h(\pi) = (\pi, \xi) - l(\xi)$  et son inverse  $\xi = \frac{\partial h}{\partial \pi}$ ,  $l(\xi) = (\pi, \xi) - h(\pi)$  sont des isomorphismes, alors le Lagrangien réduit  $l$  et l'Hamiltonien réduit  $h$  sont hyper-réguliers.