Anatol Vieru : formalisation algébrique et enjeux esthétiques

- Costin Cazaban, Moreno Andreatta, Carlos Agon et Dan Tudor Vuza -

> *« On a fait tant de musiques avec des nombres premiers, avec la suite Fibonacci, etc. ; dans peu d'entre elles les nombres en question ont été entendus ; dans la plupart, ils ont aidé à établir une cohérence de surface, sans pertinence*[1]*. »*

1 Avant-propos

Dans cette section, nous rassemblons, dans un seul texte, les différentes interventions qui ont eu lieu pendant la journée d'étude autour du problème de la formalisation algébrique des structures musicales. Cette séance d'une journée, qui s'est achevée par un concert autour du compositeur roumain Anatol Vieru (1926-1998), a été l'occasion de découvrir quelques aspects de ce théoricien, figure importante dans l'histoire des relations entre mathématiques et musique. Son ouvrage théorique principal, *Cartea Modurilor* (1980)[2] contient un travail de formalisation de certains aspects théoriques et compositionnels. Il a constitué une source précieuse d'inspiration pour le travail d'un mathématicien, Dan Tudor Vuza, qui a en a généralisé d'une façon rigoureuse plusieurs résultats théoriques[3]. En appliquant la notion de composition de classes modales au domaine du rythme[4], Vuza jette les bases d'une formalisation algébrique du processus de construction de canons rythmiques. Ce problème représente la métamorphose musicale d'une ancienne conjecture mathématique de la fin du XIX^e^ siècle (conjecture de Minkowski) ; une implémentation en a été proposée par Moreno Andreatta et Carlos Agon dans le logiciel

[1]A. Vieru, *Cuvinte despre sunete* [Des mots sur les sons], Cartea Românească, Bucarest, 1994 (traduit du roumain par Andrei Vieru).

[2]Bien que la traduction anglaise de Cartea Modurilor (*The Book of Modes*, Editura Muzicala, 1993) présente de nombreux éléments d'ambiguïté, surtout stylistiques, par rapport à l'édition roumaine, elle est particulièrement précieuse car elle a été élargie avec une partie nouvelle (« From Modes to Musical Time ») contenant la transposition de la théorie modale classique dans le domaine du rythme (Cf. en particulier le quatrième chapitre « Music and Mathematics », qui fait aussi référence à la formalisation algébrique du rythme musical proposée par Dan Tudor Vuza). Pour ce qui concerne la théorie des suites modales, dont on montrera l'application compositionnelle à travers quelques éléments d'analyse de la *Symphonie n° 2*, la source originaire a l'avantage de contenir une section en français (« Des modes, vers un modèle de la pensée musicale intervallique », p. 191-204) dans laquelle le compositeur reprend les points essentiels de la théorie modale qu'il a développée en intégrant le calcul des différences finies, à la base de la technique des suites modales.

[3]Cf. D. T. Vuza, « Aspects mathématiques dans la théorie modale d'Anatol Vieru », Parts 1-4, *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*, 27 (1982), n° 2 et 10 ; 28 (1983), n° 7 et 8.

[4]Cf. D. T. Vuza, « Sur le rythme périodique », *Revue Roumaine de Linguistique-Cahiers de linguistique Théorique et Appliquée* 23, n° 1, 1985, p. 73-103.

OpenMusic. Faute d'espace pour aborder ce sujet, on a préféré développer ce compte rendu en partant des enjeux esthétiques de certaines propositions théoriques de Vieru et pour cela nous avons pris comme source l'exposé du théoricien et compositeur Costin Cazaban. Son analyse des œuvres *Ode au silence* (1966-1967) et *Symphonie n° 2* (1973) permet d'intégrer aux enjeux esthétiques une partie théorique concernant la formalisation algébrique et, plus exactement, la construction des suites modales. Pour cela on a résumé les résultats principaux de l'exposé de Vuza, en donnant surtout des exemples et en indiquant, en même temps, quels sont les aspects susceptibles d'être généralisés à l'aide de la théorie mathématique de la musique de Guerino Mazzola.

2 Introduction

La musicologie américaine utilise souvent la notion de « musique algorithmique » pour désigner une manière de composer basée sur le calcul et le jugement déductif (dont le sérialisme est un cas particulier), en opposition avec la recherche de l'immanence (ou de l'« inspiration ») et le jugement inductif. Mais l'éventail stylistique de la musique algorithmique est tout aussi large que celui de la musique du XX^e^ siècle en général et il est donc nécessaire de faire la distinction entre technique et esthétique, entre un mode d'élaboration et un style qui lui semblerait associé inextricablement.

Les techniques imaginées et largement utilisées par Anatol Vieru tout au long de son activité créatrice se revendiquent sans aucun doute de la pensée algorithmique, mais, à l'écoute, sa musique n'évoque aucunement le calcul. Par ailleurs, il y a en apparence un écart stylistique important entre ses différentes œuvres — parfois à l'intérieur d'une œuvre même[5] — malgré la solidarité évidente des principes génératifs.

> *« Ma démarche théorique, comme la pratique musicale de toute une génération, m'a permis d'avancer certaines idées en contradiction avec les opinions de l'avant-garde de l'époque. J'ai souligné l'importance des modes[6] pauvres de 3, 4, 5, 6 éléments ; tandis que les modes riches ont la qualité d'inclure plusieurs modes pauvres, un mode pauvre a la qualité d'être inclus dans plusieurs modes riches. Un mode dense, riche en éléments, comprend un grand nombre de sous-ensembles. Il est inclus cependant dans un nombre restreint de modes ».*

Toute la théorie des modes élaborée par le compositeur roumain se voulait en effet *« une théorie des mécanismes qui relient les sons et les intervalles »*, indépendante de toute image stylistique circonscrite.

La théorie modale de Vieru adopte comme point de départ des observations de nature perceptive : les propriétés ensemblistes de l'oreille qui identifie les zones modales

[5] Le sérialisme prend en compte seulement la présence. Vieru a découvert et théorisé la force de l'absence. Il a articulé cette opposition dans le cadre d'une théorie — celle des modes riches, qui ont un important pouvoir d'inclusion, et des modes pauvres, qui ont la capacité d'être inclus dans de nombreuses configurations modales en même temps. Le compositeur a musicalement tiré profit de ce qu'il appelait « l'ambiguïté » de ces derniers. Voir, en ce sens, son explication « positive » du diatonisme et du chromatisme (cf. *infra*), ainsi que son étude « The Rehabilitation of the "Defective" Modes » dans *The Book of Modes*, Bucarest, Editura Muzicala, 1993, p. 137-141.

[6] « Nous appelons *mode* tout ensemble de classes de résidus » (*The Book of Modes*, *op. cit.*, p. 192), c'est-à-dire tout ensemble d'éléments du groupe cyclique $\mathbf{Z/12Z}$.

relativement stables, perçoit les éléments étrangers, les déplacements d'une zone modale vers une autre, la richesse ou la précarité des échelles. Le terme d'ensemble y est utilisé rigoureusement : les échelles de sons se comportent comme des ensembles. L'oreille musicale perçoit aussi les éléments communs de deux modes et considère les modes comme rapprochés lorsque le nombre de sons communs (le cardinal de l'intersection) est plus grand. L'écoute commune réunit spontanément deux modes qui ont moins de sons dans un mode plus riche qui contient tous les sons des deux modes réunis.

> *« Regardée comme un mode, toute série dodécaphonique est stérile ; sa réunion avec n'importe laquelle de ses transpositions produira toujours le même mode de 12 sons ; l'intersection (le nombre de notes communes) est elle aussi 12. Tout autre mode avec moins d'éléments a des possibilités plus riches. Sa transposition amènera presque toujours des sons nouveaux aussi (la seule exception étant les modes à transposition limitée). La réunion de deux tonalités produira un nombre variable d'éléments ; leur intersection est elle aussi variable, en fonction de l'intervalle auquel s'opère la transposition. Cette variété résultant des opérations modales représente un réservoir de possibilités expressives dont la technique sérielle se prive. (Quand Webern travaille avec des tronçons de série, sa technique devient modale ; leur complémentarité, les réunions et les intersections des différents tronçons fonctionnent sous un régime modal)[7]. »*

L'idée de restreindre les modes dans le cadre strict de l'octave semble à première vue être une décision d'ordre pratique. Au contraire, elle s'avère pleine de conséquences esthétiques : même s'il a travaillé aussi avec des structures modales ouvertes (des « suites modales », cf. *infra*), Vieru se place dans la tradition européenne dominante qui repose sur le postulat pythagoricien de l'octave identifiante, spatialisante. Il en va de même pour le choix de travailler exclusivement dans le système tempéré.

> *« Cette théorie va rendre à la modalité ce qui lui appartient ; la technique des intersections, des modulations tonales, des transpositions si couramment utilisées dans les styles tonal et sériel, l'intérêt pour les structures symétriques (chez Webern, par exemple) tiennent de la modalité de toujours et se trouvent inclus naturellement dans ce modèle musical. »*

L'instrument mathématique fonctionne chez Vieru comme une loupe à travers laquelle il peut contempler le monde. C'est la condition de « l'étonnement créateur ». L'intégration artistique d'un modèle mathématique est considérée par le compositeur dans la dialectique complexe du concret et de l'abstrait, dans le rapport, d'autre part, entre art et nature. Pour lui, « algorithmiser » signifie « *composer en appliquant des procédés clairs et simples à un matériau musical clair et simple ; le résultat est à son tour clair, mais pas simple*[8] ». Le diatonisme est un bon exemple de problème apparemment simple, mais qui représente encore de nos jours un champ de recherche ouvert dans ce qu'une tradition américaine appelle *Music Theory.*

[7] Cf. A. Vieru, « Muzica "cealalta" » [L'autre musique], *Muzica*, Bucarest, n° 36, 1998, p. 41.

[8] Cf. A. Vieru, « Muzica algoritmica » [La musique algorithmique] in *Cuvinte despre sunete*, *op. cit.*, p. 68. On se concentrera, en particulier, sur le processus algorithmique qui permet d'engendrer des suites modales à travers le calcul des différences finies sur de groupes cycliques et qui est à la base de la *Symphonie n° 2*. Une analyse de l'œuvre *Ode au silence* sera, au contraire, l'occasion pour souligner certains aspects de la théorie des modes qui sont susceptibles d'être appliqués au domaine du rythme musical.

> « *On réalise aujourd'hui que la diatonie, qui avait paru représenter la simplicité dans la musique, est en fait un phénomène complexe. [...] Le diatonisme et le chromatisme ne peuvent pas être envisagés en termes de simplicité ou de complexité, comme on le pensait jadis. Il s'agit plutôt d'une question d'unité des contraires dans le groupe* $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$[9]. »

Tous les choix, apparemment formels, d'Anatol Vieru ont une conséquence esthétique et sont envisagés dans une optique stylistique. Seulement, cette conséquence ne va pas toujours dans la direction attendue a *priori*.

On considère par exemple le diatonisme et le chromatisme comme deux catégories opposées. Vieru, quant à lui, montre que chaque mode, quel qu'il soit, a un certain degré de diatonisme et un certain degré de chromatisme et ces degrés sont quantifiables ; ils peuvent donc être introduits dans un discours formel[10].

Il ouvre ainsi la voie à une gestion autonome de ces deux catégories dont les conséquences stylistiques sont immédiatement perceptibles et pertinentes esthétiquement. Il s'agit par conséquent d'une tentative de quantification, sinon de formalisation, du style, d'un véritable « algorithme » de la signification musicale.

> « *J'ai élaboré un procédé pour mesurer le degré de diatonisme et de chromatisme d'un mode, basé sur la comparaison de la suite des quintes parfaites connexes avec la suite des demi-tons connexes à l'intérieur du même mode*[11]. »

Le degré de diatonisme d'un mode est donné par le nombre de quintes connexes. Le degré de chromatisme, par le nombre de demi-tons connexes.

Il existe des structures modales[12] parfaitement diatoniques (formées d'une seule suite de quintes connexes) et des structures modales parfaitement chromatiques (une seule suite de demi-tons connexes). Le complémentaire d'une structure parfaitement diatonique est une structure parfaitement diatonique. Une structure parfaitement diatonique inclut toutes les autres structures parfaitement diatoniques de cardinal inférieur (fig. 4.1)[13].

« Ode au silence » ou du rapport hauteurs/rythme dans la théorie modale

Cette véritable *Première symphonie*, en trois mouvements, est conçue par le compositeur comme « une étude musicale sur le temps et l'espace ».

Le premier mouvement expose un bloc sonore, constitué de 61 hauteurs différentes, obtenu par la superposition des différents états d'une même structure modale ; ce bloc sera

[9] Cf. A. Vieru, « The Musical Signification of Multiplication by 7. Diatonicity and Chromaticity », *Muzica*, Bucarest, nouvelle série, n° 21, 1995, p. 64.

[10] *The Book of Modes*, *op. cit.*, ch. 4.72-4.725, p. 100-108.

[11] Cf. A. Vieru, « Un regard rétrospectif sur la théorie des modes », *op. cit.*, p. 48.

[12] À la différence d'un *mode*, une *structure modale* est définie en termes de classes d'équivalence. Elle est représentée par une suite de résidus ayant comme somme 12 (ou, plus en général n si on considère une division de l'octave dans un nombre n de parties égales). On utilisera d'une façon tout à fait équivalente les termes *structure modale*, *classe modale* ou *structure intervallique*.

[13] Le groupe de travail autour du système diatonique de l'Université de New York à Buffalo coordonné par John Clough a proposé récemment une généralisation de cette mesure ainsi que son application comme outil d'analyse pour un vaste répertoire de la musique du XX^e^ siècle basée sur la polarité diatonique/chromatique.

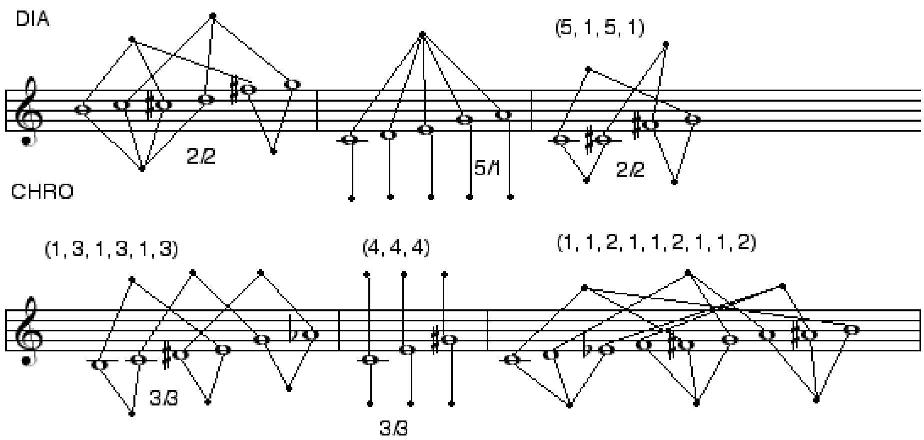

Fig. 4.1. Rapport diatonisme/chromatisme dans certaines structures modales.

ensuite sculpté, découpé à l'aide de cases temporelles prédéterminées[14]. Il en résulte un énorme decrescendo par paliers. Progressivement, les trous qui se créent ainsi sont remplis par des trémolos de gongs. Il s'agit d'une sorte de musique en creux ; la pensée modale de Vieru gère, en fait, l'avènement du silence à l'aide d'une application rigoureuse du système des hauteurs dans le domaine temporel et dynamique[15]. Ce premier mouvement, surtout, est important parce qu'il montre comment une structure modale se transforme en harmonie ; par l'intermédiaire de la technique de crible (qui génère aussi le mode), cette harmonie est, à son tour, mise en temps et devient forme musicale.

Le noyau du système est une structure modale engendrée par les premiers nombres premiers, interprétés comme intervalles (1, 2, 3, 5). Voir la figure 4.2[16].

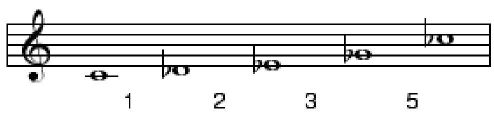

Fig. 4.2. Représentation musicale de la structure intervallique (1, 2, 3, 5).

Cette structure modale est prolongée dans les deux sens, sur le même principe. La somme de ces nombres premiers est elle-même un nombre premier : 29. À la différence

[14] Cette architecture évoque la technique des « cribles », largement utilisée par Vieru (cf., entre autres, *Le Crible d'Erathostène, Clepsydre I, Clepsydre II, Ecran*). Le terme « technique » exprime la distance entre ce processus compositionnel, qui reste plutôt heuristique, et la théorie des cribles de Iannis Xenakis, dans laquelle le criblage est défini à l'aide des opérations ensemblistes usuelles (intersection, union, complémentarité, différence symétrique. . .).

[15] Le même procédé a été utilisé dans le premier épisode de l'opéra *Jonas* (1972-1975), un « opéra-cage », disait le compositeur, une métaphore sonore de l'enfermement. Certaines techniques sont ici inspirées par l'esthétique du graphiste hollandais M. C. Escher (transformations graphiques interprétées du point de vue topologique).

[16] La même cellule génératrice est utilisée dans une œuvre comme *Écran*, créée à Royan, en 1971, et dans les deux *Clepsydres* (1968-69 et 1970-72).

des structures modales orthodoxes que Vieru a classées dans sa liste exhaustive[17], celle-ci est une structure non octaviante (fig. 4.3).

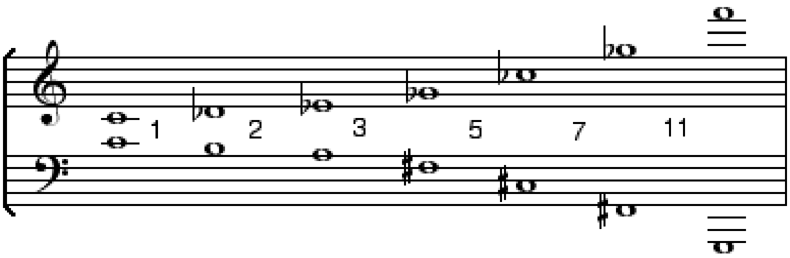

Fig. 4.3. Exemple de structure non octaviante.

À partir des pôles ainsi obtenus, la même structure est bâtie en sens inverse, symétriquement. La note *do*1 reste l'axe de symétrie (fig. 4.4).

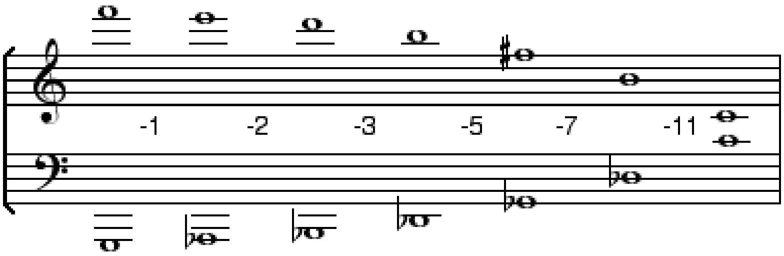

Fig. 4.4. Structure qui converge vers le *do*1.

La réunion de la première et de la deuxième séquence donne le bloc harmonique en figure 4.5) dans lequel *sol*1, *fa*♯, *do*♯, *si*1, *fa*♯2 et *fa*3 sont les axes de symétrie, eux-mêmes étant symétriques par rapport au *do* central (fig. 4.6). Le bloc est complété en prenant chacun de ses pivots comme point de départ d'une nouvelle suite qui utilise les mêmes nombres premiers comme intervalles (fig. 4.7).

Fig. 4.5. Bloc harmonique obtenu par union ensembliste.

[17]Cf. *The Book of Modes*, *op. cit.*

Fig. 4.6. Axes de symétrie du bloc harmonique précédent.

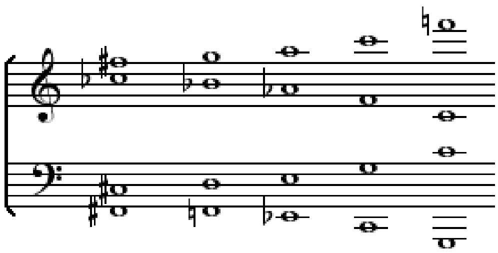

Fig. 4.7. Suites créées à partir des notes pivots.

La réunion des deux blocs donne un bloc nouveau de 31 sons (fig. 4.8).

Fig. 4.8. Bloc harmonique résultant de l'union des deux blocs précédents.

Le nouveau bloc a d'autres pivots (locaux) qui, à leur tour, génèrent de nouveaux centres. Ces centres se situent cette fois dans le groupe cyclique **Z/24Z** d'ordre 24 (fig. 4.9). Ces nouveaux centres engendrent, sur le même principe, une construction nouvelle de 30 sons, utilisant les quarts de ton, symétrique par rapport au do central, sans que cette note soit incluse cependant dans le bloc (fig. 4.10).

Les deux systèmes se situent, l'un par rapport à l'autre, à un quart de ton et forment ensemble le bloc de 61 sons qui constitue le matériau de base de la symphonie. Cet accord contient plusieurs symétries internes, très complexes, mais il n'est pas homogène. Il s'apparente donc à un mode placé à la verticale plutôt qu'à un cluster.

Joué dans sa totalité, au début de l'œuvre, ce bloc semble totalement obscur à cause de sa densité. Toutefois, lorsque le compositeur procède à des découpages, il révèle son isomorphisme interne en mettant en évidence sa structure modale reposant sur les pre-

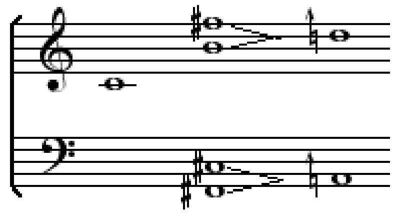

Fig. 4.9. Centres de symétrie dans l'espace micro-tonal.

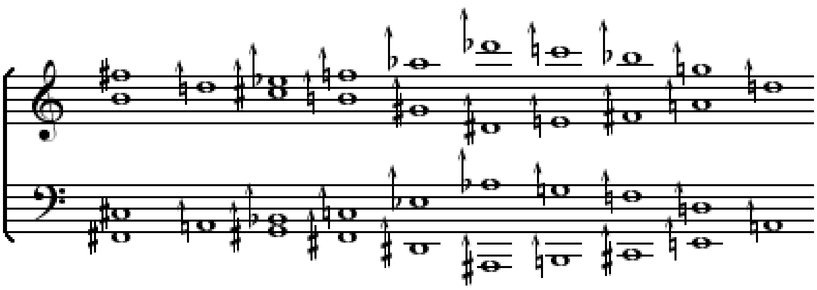

Fig. 4.10. Construction d'une structure micro-intervallique à partir des notes pivot.

miers nombres premiers. Effectivement, ce bloc est par la suite sculpté, dans la première section de la symphonie, selon un algorithme transparent. Le compositeur imagine trois situations :

a) présence du son *forte* ;

b) présence du son *piano* ;

c) absence du son (pause).

Vieru dispose donc les sons selon un decrescendo écrit, entre deux pôles : tous les 61 sons *forte*, d'un côté, et tous les 61 sons absents, de l'autre, en passant par des situations où *forte*, *piano* et silence sont mélangés. Pour ce faire, au lieu de travailler avec des sons individuels, il travaille avec 5 découpages du bloc de base, selon les registres. Ainsi, il doit gérer « seulement » 243 degrés (3^5, car il s'agit de permutations de trois éléments pris par 5).

La musique est composée par conséquent selon une technique sculpturale : du bloc de marbre de 61 sons, au début, le compositeur enlève progressivement des sons, selon le schéma présenté. Vieru voyait dans cette structure une représentation symbolique, celle de la manifestation du temps aveugle.

Le mécanisme utilisé dans ce premier mouvement de la Symphonie *Ode au silence* rappelle la technique de la musique électroacoustique de l'époque. On ne s'étonnera donc pas de retrouver, à l'audition, la sensation d'écouter une pièce électroacoustique, car l'oreille perçoit le bloc initial comme un son global riche, presque un bruit blanc, dont on enlève des partiels par une sorte de filtrage écrit. Dans le finale de la symphonie, le bloc initial est reconstruit, mais ponctuellement, par découpes variées, selon des figures géométriques qui mettent en temps des tronçons du matériau de base. L'auteur dit, à juste titre, de cette œuvre qu'elle met en évidence l'étroite association du temps et de l'espace chez l'auditeur, incapable d'approcher l'une de ces deux catégories sans faire immédiatement intervenir l'autre. On est là au cœur d'un problème qui représente l'objet de toute la deuxième partie de *The Book of Modes*. Il s'agit du plongement d'une théorie « hors-temps », pour reprendre la terminologie de Xenakis, dans l'univers du temps musical, une question qui a intéressé de nombreux théoriciens du XXᵉ siècle[18]. Vuza est parti de la théorie des modes pour construire un modèle algébrique du rythme périodique dont certaines conséquences représentent un moment crucial dans l'histoire des relations entre mathématiques et musique.

Pour mieux le comprendre il faut partir de la notion centrale dans le traité des modes : la « composition ». Composer deux modes signifie prendre l'union des transpositions (modulo l'octave) de la structure intervallique du premier mode sur les notes du deuxième. On peut facilement vérifier que l'opération de composition, qui n'est pas en général commutative sur les modes, permet de définir sur l'ensemble des classes modales (c'est-à-dire sur la famille des structures intervalliques) une structure de semi-groupe commutatif[19].

En définissant un rythme périodique comme un ensemble localement fini et périodique du groupe $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels[20], la structure de semi-groupe commutatif se transporte du domaine des hauteurs à celui des rythmes avec de conséquences remarquables pour ce qui concerne la construction des formes musicales complexes, comme les canons rythmiques. En particulier, si l'on part d'une classe modale partitionnante[21] pour l'interpréter au niveau rythmique, on obtient des canons rythmiques ayant la propriété de saturer l'axe du temps sans intersections ni trous entre les différentes voix.

L'exemple suivant montre la commutativité de l'opération de composition (indiquée avec le symbole $+$) appliquée aux rythmes. La composition de la structure intervallique (5, 1, 5, 1) avec la structure (8, 2, 2) permet d'obtenir un canon rythmique de quatre voix, chaque voix ayant trois pulsations à l'intérieur de la période 12. Dans le deuxième cas, on obtient un canon rythmique ayant la même propriété de saturer l'axe du temps, mais cette fois en trois voix, chaque voix ayant 4 pulsations à l'intérieur de la période (fig. 4.11).

À la différence de la terminologie proposée par Vuza dans son étude sur les canons rythmiques[22], on appellera « rythme interne » le pattern rythmique d'une voix et « rythme externe » le rythme qui donne les entrées des voix différentes. On remarquera, dans l'exemple précédent, la présence d'une structure intervallique ayant la propriété d'être à transposition limitée dans le sens de Messiaen.

[18] On citera ici le théoricien et compositeur américain Milton Babbitt qui partage avec Vieru un intérêt particulier pour l'approche algébrique. Ses écrits, encore assez méconnus en France, insistent sur l'existence d'une même structure de groupe à la base du système d'organisation des hauteurs et de rythme (cf. M. Babbitt, « Twelve-Tone Invariants as Compositional Determinants », *The Musical Quaterly* n° 46, 1960, p. 246-259.), une perspective que Xenakis avait envisagée dans le cadre de sa théorie des cribles sans pouvoir en tirer les conséquences souhaitées.

[19] Un semi-groupe (commutatif) est un ensemble dans lequel on a défini une opération binaire associative (et commutative).

[20] Cf. A. Vieru, « Sur le rythme périodique », *op. cit.*

[21] Intuitivement, une structure intervallique est partitionnante si l'union de certains de ses transpositions permet d'obtenir le total chromatique sans répétition de notes.

Les classes partitionnantes, introduites par Vieru dans son catalogue des structures modales, ont été étudiées d'une façon exhaustive par Vuza dans la quatrième partie de l'étude « Aspects mathématiques dans la théorie modale d'Anatol Vieru », p. 757-773.

[22] Cf. D. T. Vuza, « Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons », *op. cit.*

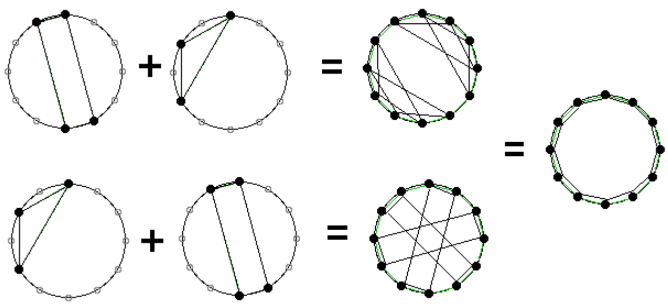

Fig. 4.11. Factorisation du groupe cyclique **Z/12Z**.

Il s'agit d'une propriété générale du groupe cyclique **Z/12Z** :

Dans toute factorisation du groupe **Z/12Z** *dans deux sous-ensembles A et B, au moins un des deux est un mode à transposition limitée de Messiaen*[23]*.*

En général ce résultat est valable pour tout groupe de Hajos[24], c'est-à-dire pour tout groupe cyclique dont l'ordre peut s'exprimer sous une des formes suivantes : une puissance d'un nombre premier ; le produit d'un nombre premier par la puissance d'un autre premier distinct ; le produit des carrés de deux premiers distincts ; le produit de deux nombres premiers distincts par un troisième nombre premier distinct ou son carré ; le produit de quatre nombres premiers distincts. En criblant l'axe des entiers à l'aide des contraintes posées, on s'aperçoit que le plus petit groupe cyclique n'ayant pas la propriété de Hajos est **Z/72Z**. Pour ce groupe il existe effectivement une classe partitionnante qui n'est pas un mode à transposition limitée de Messiaen. Interprétée au niveau rythmique, la factorisation de **Z/72Z** dans deux sous-ensembles n'ayant pas la propriété de transposition limitée conduit au plus petit canon rythmique régulier complémentaire de catégorie maximale[25].

La « Symphonie n° 2 » ou de la puissance générative des suites modales

Le livre des modes d'Anatol Vieru n'est pas seulement un catalogue où toutes les structures intervalliques du système tempéré **Z/12Z** trouvent une place (à la fois pour ses propriétés mathématiques et pour les caractéristiques musicales qu'en découlent),

[23] Pour la démonstration voir la quatrième partie de l'étude de D. T. Vuza, « Aspects mathématiques dans la théorie modale d'Anatol Vieru », *op. cit.*

[24] Mathématicien hongrois qui a résolu, dans les années quarante du XXᵉ siècle, une ancienne conjecture d'Hermann Minkowsky. Voir le livre de S. K. Stein et S. Szabó : *Algebra and Tiling*, The Carus Mathematical Monographs, n° 25, 1994.

[25] La terminologie utilisée par Vuza explique les trois propriétés de base d'un tel canon : *régularité* de la pulsation que l'on entend dès que toutes les voix sont entrées, *complémentarité* parmi les voix différentes (ce qui signifie ni superpositions ni trous) et *maximalité* dans la taille des patterns (qui ont, tous les deux, la même période du groupe cyclique auquel ils appartiennent).

mais c'est avant tout un essai de modélisation de la pensée musicale intervallique. À ce propos, un aspect fondamental de l'écoute musicale est le rapport entre sons et intervalles, une relation qui est bien explicitée par la théorie des suites modales. Par définition une suite modale est une application f de l'ensemble des entiers $\mathbf{Z}$ dans le groupe $\mathbf{Z/12Z}$ (plus en général dans un groupe commutatif). Une suite modale est dite *réductible*[26] si elle a cette propriété. Si on désigne par D l'opérateur différence[27], une réitération de cet opérateur par un nombre k de fois appliquée à la même séquence la rend nulle. Autrement dit il existe un entier $k \geq 1$ tel que $D^k f = 0$.

Exemple[28]
Prenons la suite suivante à valeurs dans $\mathbf{Z/12Z}$ et ayant une période de 18 éléments :

$$\begin{array}{lcl} f & = & (0\ 1\ 5\ 2\ 6\ 7\ 7\ 8\ 0\ 9\ 1\ 2\ 2\ 3\ 7\ 4\ 8\ 9\ \textit{etc.}) \\ Df & = & (1\ 4\ 9\ 4\ 1\ 0\ 1\ 4\ 9\ 4\ 1\ 0\ \textit{etc.}) \\ D^2 f & = & (3\ 5\ 7\ 9\ 11\ 1\ \textit{etc.}) \\ D^3 f & = & (2\ 2\ 2\ 2\ 2\ \textit{etc.}) \\ D^4 f & = & 0 \end{array}$$

Une autre famille importante de suites modales est représentée par les suites *reproductibles*[29], c'est-à-dire les suites vérifiant l'équation $D^k f = f$ pour un entier $k \geq 1$.

Exemple (Suite de Fibonacci modulo 12)

$$\begin{array}{lcl} f & = & (0\ 1\ 1\ 2\ 3\ 5\ 8\ 1\ 9\ 10\ 7\ 5\ 0\ 5\ 5\ 10\ 3\ 1\ 4\ 5\ 9\ 2\ 11\ 1\ 0\ 1\ 1\ \textit{etc.}) \\ Df & = & (0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 2\ 3\ 5\ 8\ 1\ 9\ 10\ 7\ 0\ 5\ 5\ 10\ 3\ 1\ 4\ 5\ 9\ 2\ 11\ 1\ 0\ \textit{etc.}) \\ & = & f \end{array}$$

Avant d'étudier plus en détail le rôle structural joué par les suites reproductibles à côté des suites réductibles, cherchons de comprendre la portée compositionnelle des suites modales à travers l'utilisation qui en fait Vieru dans sa *Symphonie n° 2*.

Chacun des trois mouvements de la symphonie représente la dilatation d'un geste unique :

I : motifs dérivés de l'intervalle de quinte ;

II : accords majeurs disposés selon la technique des cribles ;

III : développement à l'horizontale du système de la quinte génératrice qui constitue le matériau du premier mouvement.

Dans le premier mouvement, intitulé *Tachycardie*, Vieru utilise plusieurs suites modales superposées. Les suites périodiques infinies ont en commun avec les modes le même alphabet et certaines propriétés, comme la complémentarité, la symétrie et la transposition. Grâce à l'opérateur « différence » D, toute suite numérique peut être considérée comme une suite de sons ou comme une suite d'intervalles.

[26] Vieru utilise le terme suite modale comme synonyme de toute suite réductible. Dans la terminologie proposée par Vuza une suite modale peut ne pas être réductible (cf. *infra*).

[27] Formellement, si on désigne par $G^{\mathbf{Z}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans le groupe G, l'opérateur D est défini de $G^{\mathbf{Z}}$ à valeurs dans $G^{\mathbf{Z}}$ et tel que Df est la suite à valeurs dans G donnée par $(Df)(x) = f(x) - f(x-1)$.

[28] Voir A. Vieru, *The Book of Modes*, *op. cit.*, p. 116.

[29] Vieru parle à ce propos de suites irréductibles mais sans jamais les caractériser.

Le compositeur commence par inscrire le mode $\{2, 6, 10, 1, 9\}$ dans une suite périodique :

2 6 10 1 9
4 4 3 8
0 11 5
11 6
7

La suite est obtenue par la technique des différences finies, en ajoutant toujours le même nombre à la droite du dernier élément de la suite de niveau zéro.

2 6 10 1 9
4 4 3 8
0 11 5 6 2
11 6 1 8 3 10
7 7 7 7 7

Dans ce cas précis, le niveau 0 a une période d'un élément, tandis que le niveau I a une période de 12 éléments et il s'agit, en fait, du cycle des quintes (d'où la valeur génératrice attribuée, dans ce premier mouvement, à cet intervalle). Les 6 derniers éléments représentent la transposition à la quarte augmentée des 6 premiers éléments.

IV	:	2 6 10 1 9 11 3 0 0 8 0 7 7 9 5 6 6 6 2 9 1 7 3 ...
III	:	4 4 3 8 2 4 9 0 8 4 7 0 2 8 1 0 0 8 7 4 6 8
II	:	0 11 5 6 2 5 3 8 8 3 5 2 6 5 11 0 8 11 9 2 2
I	:	411 6 1 8 3 10 5 0 7 2 9 4 11 6 1 8 3 10 5 0 7 2 9
	:	7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7

Le niveau II a une période de 24 éléments. Les 12 derniers éléments sont la transposition à la quarte augmentée des 12 premiers. La période est aussi un palindrome, dont l'axe est un son (le *la*♭).

Fig. 4.12. Le niveau II de la séquence interprété comme suite de notes ($0 = do$).

Le niveau III a une période de 72 éléments, que Vieru dispose toujours par suites de 12 éléments

4	1	0	8	8	7	0	6	8	1	4	0
8	11	4	6	0	5	4	4	0	11	8	4
0	9	8	4	4	3	8	2	4	9	0	8
4	7	0	2	8	1	0	0	8	7	4	0
8	5	4	0	0	11	4	10	0	5	8	4
0	3	8	10	4	9	8	8	4	3	0	8

Le niveau IV, dans lequel s'insère la suite initiale de 5 sons — 2 6 10 1 9 — a une période de 144 éléments qui correspondent à 12 suites de 12 notes :

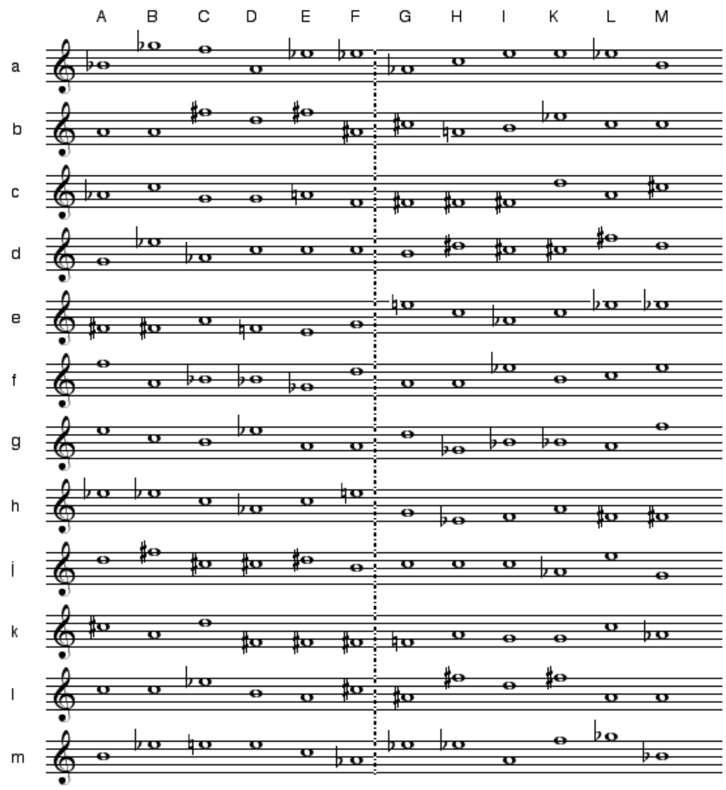

Fig. 4.13. Le niveau IV de la séquence modale.

Les 72 derniers éléments (lignes g−m) représentent la transposition à la quarte augmentée des 72 premiers éléments (lignes a−f). Les lignes d, e, f sont la rétrogradation transposée à la quarte augmentée des lignes a, b, c. La même relation se reproduit évidemment dans la partie basse du tableau.

On peut maintenant se demander si une telle suite est réductible et essayer de dégager de critères de réductibilité (ou d'irréductibilité) sans effectuer tous les calculs de différences finies. Pour cela il faut d'abord rappeler un résultat fondamental de l'algèbre qui concerne la décomposition d'un groupe cyclique en *p-groupes*[30]. Il s'agit du théorème de décomposition de Sylow, qui établit un isomorphisme entre tout groupe cyclique $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et la somme directe de ses p-sous-groupes maximaux[31].

[30]Un groupe commutatif fini est appelé un p-groupe (p étant un nombre premier) si son cardinal (c'est-à-dire son nombre d'éléments) est une puissance de p.

[31]En général un groupe commutatif G est somme directe d'une famille de sous groupes $H_1, \ldots, H_n$ si tout élément de G se décompose (avec unicité de décomposition) dans la somme $x_1 + \cdots + x_n$ où chaque élément x_i appartient à H_i .

Voyons maintenant ce que cela signifie dans le cas du groupe cyclique $\mathbf{Z/12Z}$ et comment appliquer ces résultats pour établir des critères de réductibilité d'une suite modale.

Exemple

La décomposition de 12 en facteurs premiers donne : $12 = 2^2 \times 3$. Le groupe $\mathbf{Z/12Z}$ est donc somme directe de H_1 et H_2, les sous-groupes ayant respectivement 4 et 3 éléments. L'ensemble H_1 est le sous-groupe engendré par l'intervalle de tierce mineure et correspond aux éléments $\{0, 3, 6, 9\}$ tandis que H_2 est le sous-groupe engendré par l'intervalle de tierce majeure et correspond aux éléments $\{0, 4, 8\}$. À l'aide d'un repère cartésien, on peut se rendre compte de la structure toroïdale[32] de $\mathbf{Z/12Z}$ et on peut facilement calculer les projections de $\mathbf{Z/12Z}$ sur les deux groupes.

Ces applications seront maintenant utilisées pour établir des critères de réductibilité de la suite de 144 éléments utilisée par Vieru dans sa *Symphonie*. Il suffit de décomposer la suite de départ, à valeurs dans $\mathbf{Z/12Z}$, dans une partie à valeurs dans H_1 et une autre partie à valeurs dans H_2. Le tableau suivant montre la projection de la suite sur le sous-groupe ayant 3 éléments :

4	0	8	0	0	0	8	0	4	4	0	8
0	0	0	8	0	4	4	0	8	0	0	0
8	0	4	4	0	8	0	0	0	8	0	4
4	0	8	0	0	0	8	0	4	4	0	8
0	0	0	8	0	4	4	0	8	0	0	0
8	0	4	4	0	8	0	0	0	8	0	4
...											

Notons que les éléments de la nouvelle suite à valeurs dans H_1 se répètent par groupes égaux de 9 (autrement dit, la nouvelle suite est 9-périodique). La projection de la suite du départ dans le sous-groupe ayant 4 éléments est donnée par le tableau suivant :

6	6	9	9	3	3	0	0	0	0	3	3
9	9	6	6	6	6	9	9	3	3	0	0
0	0	3	3	9	9	6	6	6	6	9	9
3	3	0	0	0	0	3	3	9	9	6	6
6	6	9	9	3	3	0	0	0	0	3	3
9	9	6	6	6	6	9	9	3	3	0	0
...											

Notons que la nouvelle suite à valeurs dans H_2 est aussi périodique et sa période est égale à 16.

[32]La théorie mathématique de la musique de Guerino Mazzola utilise cette représentation (qui est appelée « tore des tierces ») pour mieux comprendre la notion de symétrie en musique. Signalons qu'une telle représentation est aussi centrale dans une de premières études sur les propriétés algébriques du système tempéré à n degrés proposée par G. Balzano dans son article « The group-theoretic description of 12-fold and microtonal pitch systems », *Computer Music Journal*, 4, 1980, p. 66-84.

Le théorème qui permet de donner une caractérisation complète des suites réductibles est le suivant[33] :

> *Une suite f à valeurs dans un p-groupe $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ est réductible si et seulement sa période est une puissance (éventuellement nulle) de p.*

En général, pour vérifier qu'une suite à valeurs dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est réductible il suffit de décomposer $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans ses p-groupes maximaux, prendre les projections de la suite du départ sur ces groupes et appliquer le critère précédent. On peut donc conclure que la suite utilisée par Vieru est réductible[34].

Les suites de niveau V à VII ont toutes 144 éléments, celle de niveau VIII, 288 éléments et la suite de niveau IX, 864 éléments. Dans le premier mouvement de la *Symphonie n° 2*, les niveaux I, II, III, IV, VII et VIII sont déroulés selon le principe des cribles. Les suites s'interrompent et reprennent avec des périodicités fixes pour chacune d'entre elles.

Le système de boucles (qui ont des périodicités différentes l'une par rapport à l'autre) est géré à l'aide d'applications spécifiques dans l'ensemble des nombres premiers : la suite de niveau N est associée à un couple de nombres premiers et c'est la périodicité de ces derniers et de leurs multiples qui détermine la périodicité de la suite.

Ces associations créent pour les suites qui se déroulent en même temps des régimes différents, donnant ainsi l'impression d'une musique qui superpose non seulement les pulsations mais aussi les styles (puisque « l'expression » d'une suite dépend de son matériau spécifique). Chaque suite est liée à un groupe particulier d'instruments, ce qui facilite la perception et implique la couleur et le sens dans cette algèbre des styles.

Dans le deuxième mouvement de la symphonie (« Psaume »), la périodicité différente des éléments (le principe de crible) est appliquée à des accords majeurs de trois sons[35]. Les 12 premiers nombres premiers sont assignés à douze accords majeurs qui se succèdent de quinte en quinte (intervalle générateur du système, dans le premier mouvement).

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
F	C	G	D	A	E	B	G♭	D♭	A♭	E♭	B♭

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
2	3	2	5	3	7	2	3	5	11	x	13	7	5	2	17	3	19	5	7	11
F	C	F	G	C	D	F	C	G	A	–	E	D	G	F	B	C	F♯	G	D	A …

[33]Pour la démonstration, qui est essentiellement un raisonnement par récurrence sur la puissance k du nombre premier p, on renvoie à l'article « On some properties of periodic sequences in Anatol Vieru's Modal Theory » (à paraître dans *The Tatra Mathematical Journal*, Bratislava).

[34]On ne discutera pas ici les critères de reproductibilité d'une suite, ni on ne cherchera à expliquer certaines propriétés génétiques, pour utiliser la terminologie de Vieru, comme le fait que les éléments 0, 3, 6, 9 ont une fréquence d'apparition beaucoup plus grande par rapport à d'autres nombres. Ce phénomène, qui représente le côté fascinant de ces suites modales, est un problème ouvert dont la solution est à chercher probablement dans un résultat sur lequel on insistera un peu plus dans la partie finale de cette étude, à savoir le fait que toute suite périodique à valeurs dans un groupe commutatif fini se décompose d'une manière unique dans une partie réductible et une partie reproductible.

[35]Pour Vieru, « *... la consonance et la tonalité représentent deux niveaux différents de la musique ; la tonalité est un langage, tandis que la consonance est seulement une partie du vocabulaire de ce langage.... Le problème qui s'est posé a été celui d'imaginer de nouvelles règles de manipulation des consonances* » (A. Vieru, « Natura si cultura in perceptia muzicala » [Nature et culture dans la perception musicale], *Muzica*, Bucarest, n° 34, 1998, p. 37.