

Dans la plupart des modèles physiques d'instruments de type cuivre, le jet localisé au niveau de l'excitateur est en général modélisé par une équation de type Bernoulli (simple, ou version instationnaire, ou avec pertes de charges). La non-linéarité de ce type, couplé à une lèvre et au tube, est responsable de l'auto-oscillation. Toutefois, l'équation de Bernoulli ne prend pas en charge les échanges de puissance entre le jet et la lèvre : la lèvre couplée n'agit que comme un modulateur de l'ouverture. En particulier, l'énergie stockée dans la lèvre n'est pas restituée au jet. Dans cet article, nous proposons de rétablir ces échanges de puissance en prenant en compte l'énergie cinétique du jet dans un cadre instationnaire pour des hypothèses standard simples (écoulement laminaire incompressible sans perte). Dans un premier temps, les solutions des équations d'Euler sont décrites pour un jet 2D avec des conditions aux frontières adaptées à une lèvre mobile (présence d'une vitesse transverse). Puis, un modèle macroscopique est déduit de la solution par intégration des champs de vitesse et de pression à chaque frontière. Ce modèle est un système différentiel. Il est équivalent au premier, au sens où le champ de vitesse peut être complètement déduit des variables macroscopiques. De plus, il respecte exactement le bilan de puissance du système physique original. Ce système se réécrit alors naturellement sous la forme d'un système dit "Hamiltonien à ports" dont nous rappelons le formalisme. Enfin, un modèle simplifié d'instrument complet est construit en connectant ce jet à "bilan énergétique équilibré" à une lèvre (masse-amortisseur-ressort) et un simple tube acoustique droit. Des simulations numériques sont mises au point de sorte qu'elles préservent, elles aussi, le bilan énergétique. Les résultats de ces simulations et de celles obtenues à partir de l'équation de Bernoulli sont comparées et les différences caractérisées.

1 Description globale du système & problématique

On considère un musicien (M) qui interagit via un jet (J) avec le résonateur acoustique de l'instrument (I). Le système complet est idéalisé et composé des sept organes élémentaires suivants (voir figure 1) :

- (A) **Une source d'Air** : alimentation idéale de pression,
- (L) **Une Lèvre** : système masse-ressort-amortisseur parallélépipédique,
- (E) **Un Ecoulement** : laminaire incompressible,
- (T_{-,+}) **Turbulences** : deux éléments dissipatifs (T_+ localisé en aval et T_- localisé en amont de l'écoulement),
- (TA) **Tube Acoustique** : tube droit acoustique conservatif,
- (R) **Rayonnement** : charge impédantielle de rayonnement de type résistive idéale.

Les modèles correspondants sont détaillés en section 3.

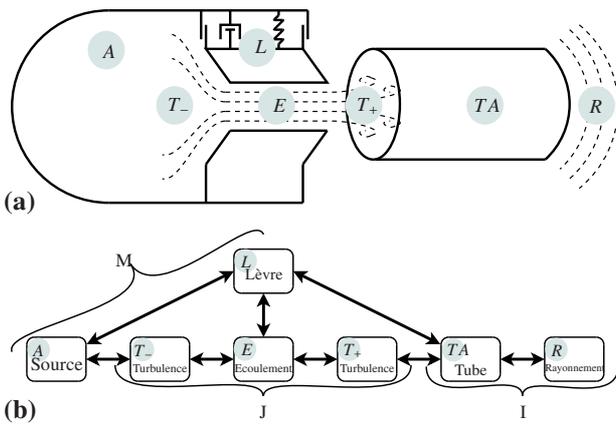


FIGURE 1 – Schéma du système complet composé du musicien (M) interagissant via un jet (J) avec le résonateur acoustique de l'instrument (I) : (a) vue d'ensemble (b) représentation des échanges de puissance entre les différents organes.

De nombreux modèles ont été étudiés dans la littérature [1, 2]. Pour les plus classiques qui négligent les débits de

pompage générés par le mouvement de la lèvre, les échanges de puissance entre la lèvre et le reste du système ne sont pas respectés. Dans le cas de la clarinette [3], un équilibre énergétique est vérifié via la prise en compte de débits de pompage. Mais, aucun transfert de puissance sur l'énergie (cinétique) du jet n'est inclus et considéré : l'énergie de la lèvre est directement transférée au tube. Dans ce travail, on construit un modèle de jet basé sur un écoulement laminaire, incompressible et instationnaire. Il a pour objectif de répondre à deux problèmes : (P1) inclure une énergie cinétique et (P2) garantir un bilan de puissance bien posé entre chaque organe.

2 Systèmes Hamiltoniens à ports : principes et exemple introductif

Cette section donne quelques éléments introductifs sur les systèmes Hamiltoniens à ports et leur formalisme. Ce formalisme a déjà été introduit dans le cadre de la modélisation des composants électroniques pour la synthèse sonore dans [4].

2.1 Formalisme

Considérons un système physique composé de :

- n_S **composants stockants**, pour lesquels l'énergie est $\mathbb{E} = h_S(x_S) \geq 0$ (typiquement, pour un ressort de raideur K , on a $h(x) = \frac{1}{2}Kx^2$ et l'état x est l'élongation).
- n_d **composants dissipatifs**, pour lesquels la puissance dissipée est $\mathbb{D}_d = D_d(w_d) \geq 0$ (typiquement, pour un amortissement fluide de coefficient a , $D(w) = aw^2$ où $w = \dot{x}$ est la vitesse).
- n_P **ports externes**, avec comme puissance entrante \mathbb{P}_P .

En notant les efforts e (par exemple, force, pression ou tension électrique) et les flux f (par exemple, vitesse, débit volumique, ou intensité électrique) en adoptant la convention récepteur, la puissance reçue par un système vaut $e.f$. Pour les composants stockants, ces quantités sont directement reliées à $\frac{dh_S}{dx_S}$ et $\frac{dx_S}{dt}$ en ce sens que la

puissance reçue est précisément $e_s \cdot f_s = \frac{dE_s}{dt} = \frac{dh_s}{dx_s} \cdot \frac{dx_s}{dt}$: par exemple, pour un ressort, on a les lois constitutives $f = \frac{dx}{dt}$ et $e = kx = \frac{dh}{dx}$. Pour les composants dissipatifs, on peut aussi faire une factorisation de la puissance en efforts et flux $D_d(w) = w_d \cdot z_d(w_d)$ où z_d est positive et représente une loi constitutive (pour un amortisseur on a $f = w$ et $e = d \cdot w = z(w)$). Pour les ports externes, les efforts e_p et les flux f_p sont rangés dans deux vecteurs : l'un est considéré comme une entrée u_p et l'autre comme les sorties associées y_p de sorte que $\mathbb{P}_p = y_p \cdot u_p$. Les lois physiques (principe fondamental de la dynamique, loi de Kirchhoff, etc) permettent d'écrire les équations reliant tous les efforts et les flux. Ces équations prennent la forme d'un "Système Hamiltonien à ports" (SHP) [6] :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \mathbf{w} \\ -\mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_x & -\mathbf{K} & \mathbf{G}_x \\ \mathbf{K}^T & \mathbf{J}_\omega & \mathbf{G}_w \\ -\mathbf{G}_x^T & -\mathbf{G}_w^T & \mathbf{J}_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nabla \mathcal{H}(x) \\ \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

où les matrices \mathbf{J}_x , \mathbf{J}_ω , \mathbf{J}_y sont antisymétriques. $\nabla \mathcal{H} : \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}^{n_s}$ est le gradient de l'énergie totale $\mathbb{E} = \mathcal{H}(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{n_s} h_s(x_s)$ exprimée en fonction de l'état $[\mathbf{x}]_s = x_s$. La fonction $\mathbf{z} : \mathbb{R}^{n_d} \rightarrow \mathbb{R}^{n_d}$ est la collection des z_d exprimés en fonction de $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n_d}$ ($[\mathbf{w}]_d = w_d$) telle que $\mathbf{z}(\mathbf{w})^T \cdot \mathbf{w} = \sum_{d=1}^{n_d} D_d(w_d)$ soit la puissance totale dissipée. Sous cette forme, l'antisymétrie de la matrice générale S garantit le bilan de puissance. En effet, la multiplication scalaire de l'équation 1 à gauche par $(\nabla \mathcal{H}(x), \mathbf{z}(\mathbf{w}), \mathbf{u})^T$, génère par construction le bilan de puissance : $\dot{E} + \mathbf{z}(\mathbf{w})^T \cdot \mathbf{w} - \mathbf{u}^T \mathbf{y} = 0$.

2.2 Exemple : un système de dimension finie

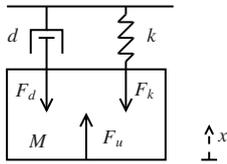


FIGURE 2 – Système masse-ressort-amortissement

Considérons le système masse-ressort-amortissement sous l'action d'une force F_u en figure 2 pour lequel on néglige les forces de pesanteur. Pour la masse, l'énergie stockée est décrite par $h_1(x_1) = \frac{M}{2}x_1^2$ pour l'état $x_1 = \dot{x}$. Pour le ressort et l'amortissement, les quantités sont celles définies en §2.1. Les variables de ports sont $\mathbf{u} = F_u$ et $\mathbf{y} = \dot{x}$. Ainsi, en notant x_2 la position, et w_1 la vitesse, le principe fondamental de la dynamique appliqué à ce système conduit directement à :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ w_1 \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/M & -1/M & 1/M \\ 1/M & 0 & 0 & 0 \\ 1/M & 0 & 0 & 0 \\ -1/M & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} \\ z_1(\omega_1) \\ u \end{pmatrix}$$

où $h(x_1, x_2) = \frac{1}{2}Mx_1^2 + \frac{1}{2}Kx_2^2$.

3 Modèles physiques et représentations sous forme SHP

3.1 Musicien (M)

3.1.1 Source d'air (A)

La source d'air est le seul élément actif du système. Dans cet article, nous considérons une alimentation idéale de pression (P_A). La puissance consommée par le système est $\mathbb{P}_A(t) = P_A(t)U_A(t)$.

3.1.2 Lèvre (L)

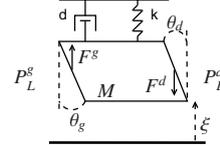


FIGURE 3 – Modèle de lèvre (L) simplifié

La lèvre est modélisée par un système masse-ressort-amortissement présenté en figure 3. Les forces appliquées sur les surfaces gauche et droite sont $F_L^g = S_g P_L^g$ et $F_L^d = S_d P_L^d$ avec $S_g = A_g \sin(\theta_g)$ et $S_d = A_d \sin(\theta_d)$. En ajoutant les deux ports correspondants (gauche/droit) à l'exemple de §2.2, et en introduisant $X = (\xi, \xi)^T$, $\mathbf{w} = w$, $\mathbf{u} = (F_L, P_L^g, P_L^d)$ et $\mathbf{y} = (V_L, U_L^g, U_L^d)$, (L) se reformule comme un SHP avec pour matrice S_L (cf. 1) :

$$S_L = \begin{pmatrix} 0 & -1/M & -1/M & 1/M & S_g/M & -S_d/M \\ 1/M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_g/M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_d/M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et pour énergie $H_L(X) = \frac{1}{2}M\dot{X}_1^2 + \frac{1}{2}K(X_2 - \xi_0)^2$.

3.2 Le Jet (J)

Le jet est composé ici d'un écoulement laminaire (sous la lèvre) et de dissipation par turbulence activable en amont et en aval.

3.2.1 Écoulement (E) et sa forme macroscopique (contribution principale)

On considère un écoulement 2D laminaire irrotationnel incompressible d'un fluide parfait dans un volume variable $\Omega(t) = l\xi\xi(t)$, sous une paroi mobile (voir figure 4).

En supposant l'effet de pesanteur négligeable, les champs de vitesse et de pression dans le volume sont gouvernés par les équations d'Euler :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho_0} \nabla(p) = 0 \quad (3)$$

où ρ_0 est la masse volumique de l'air. Les conditions aux frontières sont données par : $v_y(x, 0, t) = 0$ et $v_y(x, \xi, t) = \dot{\xi}(t)$. La solution de ce problème est :

$$\begin{cases} v_x(x, t) = v_0(t) - \frac{\dot{\xi}}{\xi} x \\ v_y(y, t) = \frac{\dot{\xi}}{\xi} y \end{cases} \quad (4)$$

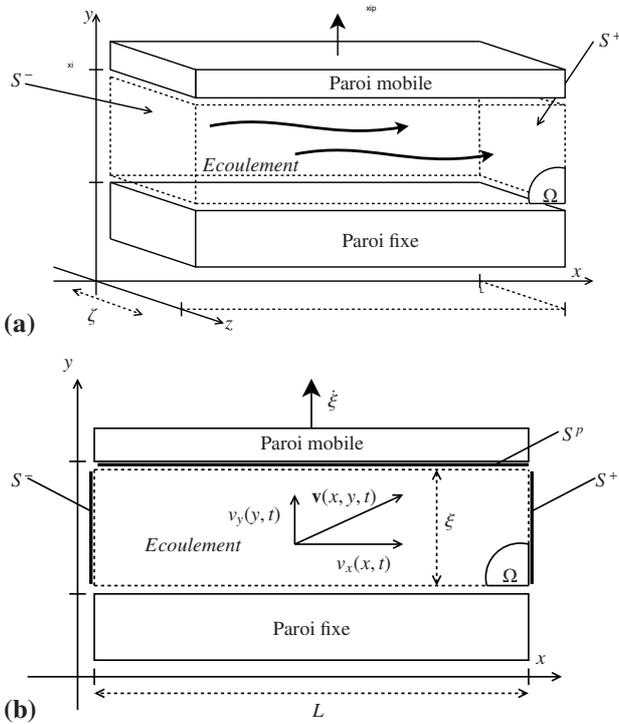


FIGURE 4 – Écoulement laminaire 2D sous une paroi mobile (invariant suivant l'axe z) : le champ de vitesse $\mathbf{v}(x, y, t) = v_x(x, t)\mathbf{e}_x + v_y(y, t)\mathbf{e}_y$.

$$P(x, y, t) = P_0(t) + \rho \left[\frac{1}{2}(x^2 - y^2) \frac{\xi}{\xi} - x^2 \frac{\xi^2}{\xi^2} - (v_0 - \frac{\xi}{\xi} v_0)x \right],$$

on note $P_0(t) = P(0, 0, t)$. En évolution isovolume ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), nous pouvons limiter l'étude des propriétés énergétiques à celle de la seule énergie cinétique de montant $\frac{1}{2}\rho_0|\mathbf{v}|^2$ par unité de volume [5]. L'énergie totale s'exprime alors comme l'énergie cinétique intégrée sur l'espace Ω .

$$E_E(t) = \int_0^{\xi} \int_0^{\xi(t)} \int_0^l \frac{1}{2} \rho_0 |\mathbf{v}(x, y, t)|^2 dx dy \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} \rho \zeta l \xi v_0^2 - \frac{1}{2} \rho \zeta l^2 v_0 \xi + \frac{1}{2} \rho \zeta \frac{1}{3} l^2 \frac{l}{\xi} \xi^2 + \frac{1}{2} \rho \zeta \frac{1}{3} l \xi \xi^2 \quad (6)$$

En définissant la moyenne d'une quantité $f(x, y, t)$ sur une surface ou un volume A par $\langle f \rangle_A(t) = \frac{1}{A} \int_A f(x, y, t) dA$, l'énergie peut être exprimée comme

$$E_E = \frac{1}{2} m(\xi) \mathbf{V}^2,$$

$$\mathbf{V} = (\langle v_x \rangle_\Omega, \sqrt{\alpha(\xi)} \langle v_y \rangle_\Omega)^T,$$

où $m(\xi) = \rho \zeta l \xi$ et $\alpha(\xi) = \frac{1}{3} \left(4 + \frac{l}{\xi} \right)$. Sous cette forme, l'énergie de l'écoulement peut simplement être interprétée comme l'énergie cinétique d'une masse solide m se déplaçant avec une vitesse \mathbf{v} . Le bilan de puissance de l'écoulement est directement calculé à partir des équations d'Euler par multiplication scalaire avec \mathbf{v} . Sachant que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, on trouve :

$$\partial_t \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \right) + \nabla \cdot (p \mathbf{v}) = 0$$

En intégrant cette équation sur le volume Ω et en utilisant les identités de Green-Ostrogratski et de Leibnitz, il vient :

$$\dot{E}_E - \int_{S_p} \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Sigma} \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Omega + \int_{\Sigma} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Omega = 0$$

où $\Sigma = \{S_-, S_+, S_p\}$ est la surface pour chaque frontière et \mathbf{n} est le vecteur normal à cette surface (orienté vers l'extérieur).

Avec $\partial_y v_x = \partial_x v_y = 0$, il apparaît que,

$$\begin{aligned} \dot{E}_E &= S_- v_x(0, t) \langle p \rangle + \frac{1}{2} \rho \langle |\mathbf{v}|^2 \rangle_{S_-} \\ &+ S_+ v_x(l, t) \langle p \rangle + \frac{1}{2} \rho \langle |\mathbf{v}|^2 \rangle_{S_+} - \xi S_p \langle p \rangle_{S_p}, \end{aligned} \quad (7)$$

où $\langle - \rangle_{S_{\pm}}$ est l'opérateur de moyennage sur les surfaces S_- et S_+ . On remarque que le modèle d'écoulement peut être réduit à une description macroscopique équivalente en les variables moyennées (sur le volume pour les variables d'état et sur les surfaces de contrôle pour les variables de port). Après calculs, on trouve que le macro-modèle correspond à un SHP décrit par le système différentiel de type (1) avec :

$$X_E = (\langle v_x \rangle_\Omega, \langle v_y \rangle_\Omega, \xi)^T = (V_x, V_y, \xi)^T \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_E &= \left(\langle p \rangle + \frac{1}{2} \rho \langle |\mathbf{v}|^2 \rangle_{S_-}, \langle p \rangle + \frac{1}{2} \rho \langle |\mathbf{v}|^2 \rangle_{S_+}, S_p \langle p \rangle_{S_p} \right)^T \\ &= (P_E^-, P_E^+, F_E^p)^T \end{aligned} \quad (9)$$

$$\mathbf{y}_E = (S_- v_x(0, t), -S_+ v_x(l, t), -\xi)^T = (U_E^g, U_E^d, V_E)^T \quad (10)$$

$$S_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\zeta \xi}{m} & -\frac{\zeta \xi}{m} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{m\alpha} & \frac{\zeta l}{m\alpha} & \frac{\zeta l^2}{m\alpha} & -\frac{2}{m\alpha} \\ 0 & \frac{2}{m\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\zeta \xi}{m} & -\frac{\zeta l}{m\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\zeta \xi}{m} & -\frac{\zeta l}{m\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{m\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $H_E(V_x, V_y, \xi) = \frac{1}{2} m(\xi) V_x^2 + \frac{1}{2} m(\xi) \alpha(\xi) V_y^2$. Les pressions de sorties P_E^- et P_E^+ sont totales : Elles représentent la somme des pressions statique et dynamique. L'équivalence avec le modèle original vient du fait que le champ se déduit des variables macroscopiques.

Remarque : La première ligne correspond à une expression similaire à la formule de Bernoulli "instationnaire" utilisée dans plusieurs travaux [2, 7]. Cependant, dans notre formulation en SHP, l'énergie cinétique du système est prise en compte et engendre un couplage entre les vitesses transverse et longitudinale. Remarquons aussi que cette formulation fait émerger spontanément le débit de pompage souvent incorporé de façon ad hoc dans les modèles à vent. Une question naturelle est de savoir si l'énergie cinétique du jet a un impact significatif sur la qualité du modèle.

3.2.2 Turbulences ($T_{+,-}$)

De nombreux travaux expérimentaux sur des profils types de cordes vocales ou lèvres mettent en évidence qu'en fin de canal (ici, une lèvre à géométrie idéalisée) l'écoulement se sépare des parois pour former un jet et des tourbillons pouvant se désagréger progressivement jusqu'à l'apparition de turbulences. Pour obtenir une description simple, la complexité de ces phénomènes est souvent ramenée à l'introduction d'une dissipation de l'énergie cinétique du jet [8]. Nous considérons de tels modèles de dissipation (ici, totale) : l'un (T_+) en aval de lèvre pour un débit positif et l'autre (T_-) en amont pour un débit négatif. On peut alors simplement exprimer l'énergie dissipée comme :

$$\frac{1}{2} \rho \int_{S_-} |\mathbf{v}|^2 dS = \frac{1}{2} \rho \frac{U_E^g{}^2}{\xi^2 \zeta^2} + \frac{1}{2} \rho \frac{4}{3} V_y^2$$

$$\frac{1}{2} \rho \int_{S_+} |\mathbf{v}|^2 dS = \frac{1}{2} \rho \frac{U_E^d{}^2}{\xi^2 \zeta^2} + \frac{1}{2} \rho \frac{4}{3} V_y^2$$

Remarque : Le second terme de l'énergie cinétique est dû à la vitesse transverse du jet. Il n'est pas pris en compte dans les modèles classiques à une dimension.

En notant, $\omega_g = -U_E^g$ et $\omega_d = -U_E^d$, on peut définir la puissance dissipée en amont et en aval :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_T &= \omega \cdot \left(\frac{1}{2} \rho \frac{\omega^2}{\xi^2 \zeta^2} + \frac{1}{2} \rho \frac{4}{3} V_y^2 \right) \text{ si } \omega > 0 \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

On définit les fonctions de dissipation (T_+) et (T_-) par :

$$z_T(w) = \left(\frac{1}{2} \rho \frac{w^2}{\xi^2 \zeta^2} + \frac{1}{2} \rho \frac{4}{3} V_y^2 \right) \Phi(w)$$

où $\Phi(w)$ est une fonction phénoménologique telle que $\mathbb{P}_T(w) > 0 \forall w \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_T(w) \ll 1 \forall w \leq 0$ et telle que $\frac{dz_T}{dw}(0)$ soit définie.

3.3 Instrument (I)

3.3.1 Tube Acoustique (TA)

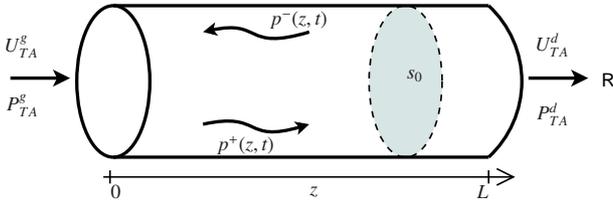


FIGURE 5 – Tube Acoustique

On considère la propagation acoustique linéaire en onde plane dans un tube droit sans perte de section s_0 et de longueur L , présenté en figure 5. Cette dernière est décrite par les équations de conservation suivantes :

$$\partial_t \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & Z_c \\ \frac{1}{Z_c} & 0 \end{pmatrix} \partial_z \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} = 0 \quad (12)$$

où $p(z, t)$ est la pression localisée au point z au temps t , u est le débit volumique, c est la célérité du son et $Z_c = \frac{\rho c}{s_0}$ est l'impédance caractéristique du tube. L'énergie acoustique totale du tube s'écrit

$$H_{TA} = \int_{z=0}^L \mathcal{H}(z, t) dz$$

où $\mathcal{H}(z, t) = \frac{1}{2} \frac{\rho}{s_0} u^2(z, t) + \frac{1}{2} \frac{s_0}{\rho c^2} p^2(z, t)$ est la densité linéique d'énergie. En notant $X = \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix}$, l'équation (12) peut se ré-écrire :

$$\partial_t X = -c^2 \begin{pmatrix} 0 & \partial_z \\ \partial_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_p \mathcal{H} \\ \delta_u \mathcal{H} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Cette équation est sous la forme d'un SHP de dimension infinie [6]. Ce type de système n'est pas étudié dans cet article mais ses propriétés sont équivalentes à celles des systèmes de dimension finie. Ainsi, la passivité est structurellement garantie. Avec le changement de fonction suivant :

$$X_p = \begin{pmatrix} P^+ \\ P^- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & Z_c \\ 1 & -Z_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix}$$

les équations de conservation deviennent,

$$\partial_t X_p + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_z X_p = 0$$

et gouvernent des ondes progressives découplées :

$$p^\pm(z, t) = p_0^\pm(t \mp z/c)$$

Les conditions aux frontières sont :

$$P_{TA}^g = p(0, t) = p_0^+(t) + p_0^-(t) \quad (14)$$

$$U_{TA}^g = u(0, t) = \frac{p_0^+(t) - p_0^-(t)}{Z_c} \quad (15)$$

$$P_{TA}^d = p(L, t) = p_L^+(t) + p_L^-(t) \quad (16)$$

$$U_{TA}^d = u(L, t) = \frac{p_L^+(t) - p_L^-(t)}{Z_c} \quad (17)$$

L'énergie du système peut être réexprimée en fonction de p_0^+ et p_L^- par un changement de variable liant l'espace au temps.

$$H_{TA} = \frac{s_0 \rho}{c} \int_0^\tau ([p_0^+(t - \theta)]^2 + [p_L^-(t - \theta)]^2) d\theta$$

3.3.2 Rayonnement (R)

Le rayonnement en sortie du tube acoustique est modélisé par une charge de type résistif $p(L, t) = Z_L u(L, t)$ avec une impédance réelle passive $Z_L > 0$. Avec (14), cette expression devient :

$$\begin{aligned} p_0^-(t) &= \lambda p_0^+(t - \tau) \\ \tau &= 2L/c \\ \lambda &= (Z_L - Z_c)/(Z_L + Z_c) \in (-1, 1) \end{aligned}$$

Cette condition frontière est extrêmement simplifiée, comparée aux impédances réelles de rayonnement. Cependant, elle permet de maintenir les effets principaux sur l'auto-oscillation. Le tube est considéré comme ouvert à droite ce qui implique une faible impédance : $Z_L \ll Z_c$ (et $\lambda < 0$).

3.4 Modèle complet

3.4.1 Gestion des contacts et des chocs

Prendre en compte les chocs au moment de la fermeture de la lèvres, tout en conservant un bilan de puissance physiquement bien posé, nécessite une étude approfondie. Or, ce travail se concentre sur le jet, son énergie cinétique et son bilan de puissance. Cependant, pour pouvoir effectuer des simulations dans toutes les configurations possibles, un modèle simpliste dissipatif de choc a été mis en place. En effet, à l'instant du choc t , la vitesse de la masse est mise à jour de sorte que $\dot{\xi}(t^+) = -\beta \dot{\xi}(t^-)$ avec $\beta \in (0, 1)$. Ainsi, la puissance dissipée au moment du choc est $\frac{1}{2} M (1 - \beta)^2 \dot{\xi}(t^-)^2$. Comme ce modèle n'est pas réaliste, les chocs ne seront pas abordés dans les simulations présentées dans ce travail.

3.4.2 Modèle final

La connexion des sous-éléments (T₋),(E),(T₊) et (L) se fait simplement en confondant les variables d'états, en remarquant que $V_y = \xi/2$. On obtient alors un SHP à dimension finie gouvernant les éléments (M) et (J) :

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_x \\ \dot{V}_y \\ \dot{\xi} \\ \omega_L \\ \omega_g \\ \omega_d \\ -U_A \\ U_{TA}^g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_x & -\mathbf{K} & \mathbf{G}_x \\ \mathbf{K}^T & \mathbb{O}_{3,3} & \mathbb{O}_{3,2} \\ -\mathbf{G}_x^T & \mathbb{O}_{2,3} & \mathbb{O}_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_L(\omega_L) \\ z_T(\omega_g) \\ z_T(\omega_d) \\ P_A \\ P_{TA}^g \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathbf{J}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{4M+ma} \\ 0 & \frac{2}{4M+ma} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\xi\xi}{m} & \frac{\xi\xi}{m} \\ \frac{2}{4M+ma} & -\frac{\xi\xi}{4M+ma} & -\frac{\xi\xi}{4M+ma} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}_x = \begin{pmatrix} \frac{\xi\xi}{m} & -\frac{\xi\xi}{m} \\ \frac{\xi l + 2S_g}{4M+ma} & \frac{\xi l - 2S_d}{4M+ma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'instrument (I) est connecté en utilisant l'expression des ondes découplées :

$$\begin{cases} P_{TA}^g = 2p_0^-(t) + Z_C U_{TA}^g \\ p_0^-(t) = \lambda P_0^+(t - \tau) \end{cases}$$

L'énergie totale du système est alors :

$$H(V_x, V_y, \xi,) = H_E(V_x, V_y, \xi) + H_L(V_y, \xi) + H_{TA}$$

4 Simulation

4.1 Schéma numérique préservant le bilan de puissance

4.1.1 Principe

On applique un schéma temporel à l'énergie, afin de calculer sa variation discrète. Alors, pour conserver le bilan énergétique de notre système, on écrit cette variation en fonction de la variation de l'état : ceci revient à fournir la différentiation discrète d'une composée de fonctions. $dE(t, dt) = \dot{E}(t)dt$ devient $\delta E(t, \delta t) = E(t + \delta t) - E(t)$ et $\partial_t E = \partial_t H(X) = \nabla_X H \cdot \partial_t X$ devient $\delta H(t, \delta t) = \partial_X^d H(X, \delta X) \cdot \delta X(t, \delta t)$. En introduisant le gradient discret $\partial_X^d H(X, \delta X)$, on obtient une discrétisation informée par les paramètres physiques du système. Ainsi, la version discrétisée du SHP est obtenue en remplaçant la dérivée temporelle et le gradient par leurs versions discrètes. Le bilan de puissance discret découle directement de l'antisymétrie de la matrice S.

Dans le cas général, l'expression du gradient discret n'est pas unique. Cependant, nous pouvons définir une version symétrique comme la moyenne de toutes les formes possibles. Cette dernière est unique.

S'il on applique cette méthode à l'exemple du système masse-ressort-amortissement §2.2, on obtient : $\partial_X^d H(X, \delta X) = \frac{1}{2}([\partial_X^d H(X, \delta X)]_1 + [\partial_X^d H(X, \delta X)]_2)$ avec

$$[\partial_X^d H(X, \delta X)]_1 = \begin{pmatrix} \frac{H(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2) - H(x_1, x_2 + \delta x_2)}{\delta x_1} \\ \frac{H(x_1, x_2 + \delta x_2) - H(x_1, x_2)}{\delta x_2} \end{pmatrix}$$

$$[\partial_X^d H(X, \delta X)]_2 = \begin{pmatrix} \frac{H(x_1 + \delta x_1, x_2) - H(x_1, x_2)}{\delta x_1} \\ \frac{H(x_1, x_2 + \delta x_2) - H(x_1, x_2)}{\delta x_2} \end{pmatrix}$$

4.2 Méthode de simulation

Pour un échantillonnage à la période $\delta t = 1/f_e$, la version à temps discret du SHP conduit à résoudre des équations en $\delta X(t_k, \delta t)$ et $w(t_k)$ (à $x(t_k)$ et $u(t_k)$ connus), dont on déduit $x(t_k + 1) = x(t_k) + \delta x(t_k, T_e)$ et $y(t_k + 1)$. En pratique, les relations implicites sont résolues par un algorithme de type Newton-Raphson. La simulation se fait avec une fréquence d'échantillonnage de 44100Hz.

5 Résultats, interprétations et discussion

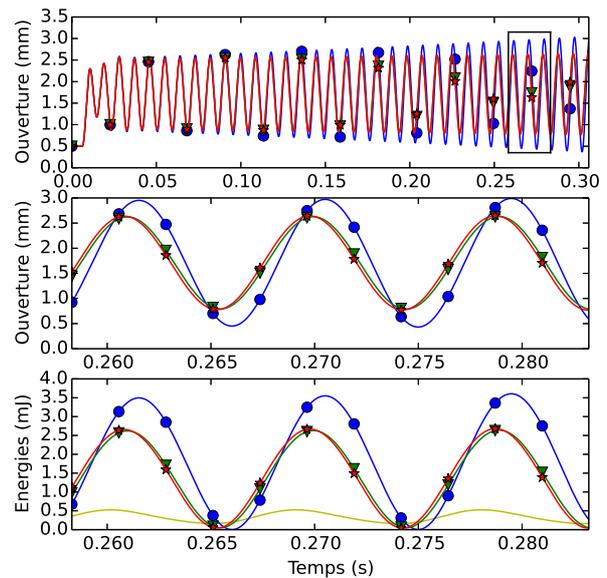


FIGURE 6 – Expériences (E1) : Courbes : (Bleu/cercles- \mathcal{M}_0), (Vert/triangles- \mathcal{M}_1), (Rouge/étoiles- \mathcal{M}_{SHP}). Graphes : (Haut) Ouverture du canal ξ en fonction du temps, (Milieu) Ouverture ξ sur un intervalle réduit, (Bas) Energies de la lèvres (énergie cinétique du jet pour \mathcal{M}_{SHP} en jaune sans marqueur)

Les simulations sont effectuées sur trois modèles pour deux "expériences numériques" (E1 et E2) : (\mathcal{M}_{SHP}) est le modèle présenté dans cet article, (\mathcal{M}_1) est le modèle basé sur l'équation de Bernoulli stationnaire avec prise en charge des débits de pompage, (\mathcal{M}_0) est le modèle basé sur l'équation de Bernoulli sans débit de pompage. Les paramètres de simulation correspondent à ceux d'une embouchure de trombone et sont donnés en tableau 1. Les résultats obtenus pour ces deux expériences sont exposés en figure 6 et 7. Pour l'expérience (E1), l'épaisseur l est petite de sorte que le débit de pompage (alors essentiellement

dû aux surfaces latérales de la lèvre) soit important. On remarque que les deux modèles M_{SHP} et M_1 se comportent de manière semblable et se stabilisent rapidement, alors que le modèle sans pompage M_0 continue de croître. Pour cette expérience, l'énergie cinétique du jet est faible (courbe jaune sans marqueur). L'effet du pompage est donc prépondérant sur l'énergie cinétique. Pour l'expérience (E2), l est décuplée

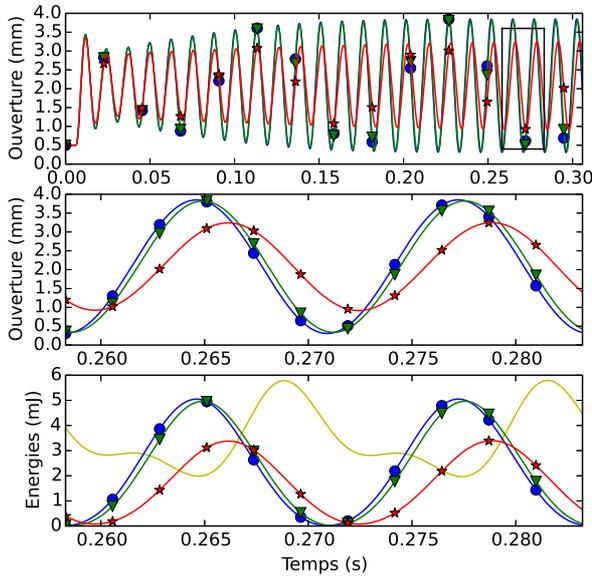


FIGURE 7 – Expériences (E2) : La légende est identique à la figure 6

de sorte que l'énergie cinétique du jet n'est plus négligeable par rapport à l'énergie de la masse (voir figure 7(bas)). De plus, dans cette configuration le débit de pompage est diminué. Contrairement à la première expérience, les deux modèles M_1 et M_0 se comportent de manière semblable ce qui montre l'effet non négligeable de la prise en compte de l'énergie cinétique dans le modèle M_{SHP} .

Expérience	(E1)	(E2)
Épaisseur de lèvre (m) : l	0.001	0.01
Longueur de lèvre (m) : ζ	0.025	0.025
Surfaces de lèvre (g/d) (m^2) : S_g et S_d	0.000176	0.000176
Ouverture au repos (m) : ξ_0	0.0005	0.0005
Masse de lèvre (Kg) : M	0.0025	0.0025
Taux d'amortissement de lèvre :	0.1	0.1
Fréquence naturelle (Hz) :	108.5	95.5
Pression d'alimentation (Pa) : P_A	8000.	8000.
Rayon du tube : (m)	0.02	0.02
λ	-0.95	-0.95

TABLEAU 1 – Valeurs des paramètres pour les deux expériences (E1) et (E2)

6 CONCLUSIONS

Dans cette article, nous avons construit un modèle de jet qui répond aux deux problèmes exposés en §1 : (P1) inclure une énergie cinétique et (P2) garantir un bilan de puissance bien posé entre chaque organe. Les simulations ont montré que la prise en compte de l'énergie cinétique modifiait la dynamique du système pour certaines configurations réalistes. Ces premiers résultats justifient une

étude plus large, en traitant par exemple, une géométrie adaptée à la clarinette. Afin de compléter ces premiers travaux, il est indispensable de construire un modèle de choc réaliste à bilan de puissance bien posé, compatible avec le formalisme des SHP. Par la suite, l'ajout d'une seconde lèvre nous permettra de traiter le cas des instruments à anches doubles et des cordes vocales. Enfin une étude comparative expérimentale sur bouche artificielle [9] pourra être menée afin de qualifier l'apport réel de ce type de modèle.

Remerciements

Les auteurs remercient Bernard Maschke. Ce travail a été fait avec le soutien des projets ANR HAMECMOPSY et CAGIMA.

Références

- [1] A. Chaigne and J. Kergomard, Acoustique Des Instruments De Musique (The Physics of Musical Instruments), *Echelles edition* (2008).
- [2] N. Fletcher and T. Rossing, The Physics of Musical Instruments, New York, USA *Springer-Verlag* (1998).
- [3] S. Bilbao, Direct simulation for wind instrument synthesis, *Conference on Digital Audio Effects* (2008).
- [4] A. Falaize-Skrzek, Simulation of an analog circuit of a wah pedal : a port-Hamiltonian approach, *Audio Engineering Society, Convention Paper*, (2013)
- [5] P. Chassaing, Mécanique des fluides : Eléments d'un premier parcours, deuxième édition *Cépaduès-éditions* (2000).
- [6] V. Duindam, A. Macchelli, S. Stramigioli, H. Bruyninckx, Modeling and Control of Complex Physical Systems : The Port-Hamiltonian Approach, *Springer* (2009).
- [7] D. H. Keefe, Physical Modeling of Wind Instruments, *Computer Music Journal* 16(4) :57-73. (1992).
- [8] A. Hirschberg, Musical aero-acoustics of the clarinet, *Journal de physique IV*, Volume 4.(1995).
- [9] N. Lopes, Control of an Artificial Mouth Playing a Trombone and Analysis of Sound Descriptors on Experimental Data, *Stockholm Music Acoustics Conference*,(2013).